RHEINISCH-WESTFÄLISCHE TECHNISCHE HOCHSCHULE AACHEN

LEHR- UND FORSCHUNGSGEBIET INFORMATIK II
RWTH Aachen · D-52056 Aachen · GERMANY
http://www-i2.informatik.rwth-aachen.de/lufgi2.html

Prof. Dr. Jürgen Giesl
Darius Dlugosz

Automatisierte Programmverifikation

Übungsblatt 11

Alle Aufgaben werden korrigiert. Die Abgabe ist bis Dienstag, 13. Februar 2001, in der Übung, Vorlesung oder im Raum 4211 möglich. Die Aufgaben werden in der Übung am 13. Februar 2001 besprochen.

Aufgabe 1: (2 Punkte)

Beweisen Sie das Lemma 6.2.4 (Zusammenhang zwischen $\succ_{lpo}$ und $\succ_{emb}$) aus der Vorlesung:

Jede lexikographische Pfadordnung ist eine Simplifikationsordnung.

Aufgabe 2: (2 Punkte)

Zeigen Sie, dass das Terminierungskriterium mit Dependency Pairs (vgl. Satz 6.3.5) notwendig ist, d.h.:

Falls ein Programm P terminiert, dann gibt es keine unendlichen Ketten von Dependency Pairs.

Aufgabe 3: (2 Punkte)

Sei P ein Programm und sei $\succsim$ eine Quasi-Ordnung. Beweisen Sie die folgende Aussage:

Wenn $l \succsim r$ für alle Gleichungen $l \equiv r \in E_P$ gilt, die in einer Auswertung $s \Rightarrow_P t$ verwendet werden, und $\succsim$ stabil, monoton und transitiv ist, dann gilt auch $s \succsim t$.

Aufgabe 4:

Beweisen Sie die folgende Aussage:

Wenn $\succ_{sim}$ eine Simplifikationsordnung ist, so ist $\succeq_{sim}$ eine stabile und monotone Quasi-Ordnung, die mit $\succ_{sim}$ kompatibel ist.

Aufgabe 5: (3 Punkte)

Das Programm P bestehe aus folgenden Datenstrukturen und Algorithmen:

$$
\begin{array}{lcl}
\textbf{structure}\ \mathsf{number} & & \\
\quad \mathcal{O} & : & \mathsf{number} \\
\quad \mathsf{succ} & : & \mathsf{number} \to \mathsf{number} \\
\\
\textbf{function}\ \mathsf{plus} : \mathsf{number} \times \mathsf{number} \to \mathsf{number} & & \\
\quad \mathsf{plus}(\mathcal{O}, y) & \equiv & y \\
\quad \mathsf{plus}(\mathsf{succ}(x), y) & \equiv & \mathsf{succ}(\mathsf{plus}(x, y)) \\
\\
\textbf{function}\ \mathsf{times} : \mathsf{number} \times \mathsf{number} \to \mathsf{number} & & \\
\quad \mathsf{times}(\mathcal{O}, y) & \equiv & \mathcal{O} \\
\quad \mathsf{times}(\mathsf{succ}(x), y) & \equiv & \mathsf{plus}(y, \mathsf{times}(x, y)) \\
\\
\textbf{function}\ \mathsf{pred} : \mathsf{number} \to \mathsf{number} & & \\
\quad \mathsf{pred}(\mathcal{O}) & \equiv & \mathcal{O} \\
\quad \mathsf{pred}(\mathsf{succ}(x)) & \equiv & x \\
\\
\textbf{function}\ \mathsf{minus} : \mathsf{number} \times \mathsf{number} \to \mathsf{number} & & \\
\quad \mathsf{minus}(x, \mathcal{O}) & \equiv & x \\
\quad \mathsf{minus}(x, \mathsf{succ}(y)) & \equiv & \mathsf{minus}(\mathsf{pred}(x), y) \\
\\
\textbf{function}\ \mathsf{ge} : \mathsf{number} \times \mathsf{number} \to \mathsf{bool} & & \\
\quad \mathsf{ge}(x, \mathcal{O}) & \equiv & \mathsf{true} \\
\quad \mathsf{ge}(\mathcal{O}, \mathsf{succ}(y)) & \equiv & \mathsf{false} \\
\quad \mathsf{ge}(\mathsf{succ}(x), \mathsf{succ}(y)) & \equiv & \mathsf{ge}(x, y) \\
\\
\textbf{function}\ \mathsf{if} : \mathsf{bool} \times \mathsf{number} \times \mathsf{number} \to \mathsf{number} & & \\
\quad \mathsf{if}(\mathsf{true}, x, y) & \equiv & x \\
\quad \mathsf{if}(\mathsf{false}, x, y) & \equiv & y \\
\\
\textbf{function}\ \mathsf{gcd} : \mathsf{number} \times \mathsf{number} \to \mathsf{number} & & \\
\quad \mathsf{gcd}(x, \mathcal{O}) & \equiv & x \\
\quad \mathsf{gcd}(\mathcal{O}, \mathsf{succ}(y)) & \equiv & \mathsf{succ}(y) \\
\quad \mathsf{gcd}(\mathsf{succ}(x), \mathsf{succ}(y)) & \equiv & \mathsf{if}(\mathsf{ge}(x, y), \\
 & & \quad \mathsf{gcd}(\mathsf{minus}(x, y), \mathsf{succ}(y)), \\
 & & \quad \mathsf{gcd}(\mathsf{succ}(x), \mathsf{minus}(y, x)))
\end{array}
$$

(a) Bestimmen Sie alle Dependency Pairs von P.

(b) Geben Sie für jedes Paar $\langle s, t \rangle \in DP(P)$ die Menge $\mathcal{U}(E_P, t)$ der verwendbaren Gleichungen an.

(c) Bestimmen Sie die Ungleichungen gemäß Satz 6.4.3, die erfüllt sein müssen, damit die Terminierung von P gezeigt werden kann.

(d) Geben Sie geeignete Relationen $\succ$ und $\succsim$ an, die die Ungleichungen aus (c) erfüllen.

Aufgabe 6: (2 Punkte)

Betrachten wir alternative Terminierungsverfahren mit Dependency Pairs.

(a) Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Behauptung:

Wenn für alle $\langle s, t \rangle \in DP(P)$ eine Reduktionsordung $\succ$ mit $s \succ t$ existiert, dann terminiert das Programm P.

(b) Wir ersetzen in allen Paaren $\langle s, t \rangle \in DP(P)$ die Tupelsymbole durch die zugehörigen Funktionssymbole (z.B. aus $\langle \mathsf{PLUS}(\mathsf{succ}(x), y),\ \mathsf{PLUS}(x, y) \rangle$ entsteht das Paar $\langle \mathsf{plus}(\mathsf{succ}(x), y),\ \mathsf{plus}(x, y) \rangle$).

Welche Folgen ergeben sich daraus?
Gilt der Satz 6.3.5 immer noch?