**Interpretation $I = (\mathcal{A}, \alpha, \beta)$:**

- Träger $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_s)_{s \in \mathcal{S}}$
- Deutung $\alpha = (\alpha_f)_{f \in \Sigma}$ mit $\alpha_f : \mathcal{A}_w \to \mathcal{A}_s$ für $f \in \Sigma_{w,s}$
- Variablenbelegung $\beta : \mathcal{V} \to \mathcal{A}$ mit $\beta(x) \in \mathcal{A}_s$ für $x \in \mathcal{V}_s$

**Interpretation von Termen**

$$
\begin{aligned}
I(x) &= \beta(x) \text{ für alle } x \in \mathcal{V} \\
I(f(t_1, \ldots, t_n)) &= \alpha_f(I(t_1), \ldots, I(t_n)) \text{ für } f \in \Sigma_{w,s},\ t_1 \ldots t_n \in \mathcal{T}(\Sigma, \mathcal{V})_w
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}_{\mathsf{bool}} &= \{\mathsf{wahr}, \mathsf{falsch}\} \\
\mathcal{A}_{\mathsf{number}} &= \{0, 1, 2, \ldots\} \\
\alpha_{\mathsf{true}} &= \mathsf{wahr} \\
\alpha_{\mathsf{false}} &= \mathsf{falsch} \\
\alpha_{\mathcal{O}} &= 0 \\
\alpha_{\mathsf{succ}}(n) &= n + 1 \\
\alpha_{\mathsf{plus}}(n, m) &= n + m \\
&\vdots
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\beta(x) &= 5 \\
\beta(y) &= 3 \\
&\vdots \\
\mathcal{A}''_{\mathsf{number}} &= \mathbb{Q} \\
\alpha''_{\mathcal{O}} &= 0 \\
\alpha''_{\mathsf{succ}}(n) &= n + 1 \\
\alpha''_{\mathsf{plus}}(n, m) &= \tfrac{n}{m}, \ \text{falls } m \neq 0 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

$I = (\mathcal{A}, \alpha, \beta)$ $\qquad$ $I' = I[\![x/6, y/8]\!]$ $\qquad$ $I'' = (\mathcal{A}'', \alpha'', \beta)$

- $I(\mathsf{plus}(\mathsf{succ}(x), y)) = \alpha_{\mathsf{plus}}(\alpha_{\mathsf{succ}}(\beta(x)), \beta(y)) = 9$
- $I'(\mathsf{plus}(\mathsf{succ}(x), y)) = 15$
- $I''(\mathsf{plus}(\mathsf{succ}(x), y)) = \frac{6}{3} = 2$

## Def. 2.2.3

Interpretation $I = (\mathcal{A}, \alpha, \beta)$ *erfüllt* $\varphi \in \mathcal{F}(\Sigma, \mathcal{V})$ ("$I \models \varphi$") gdw.

$$\begin{array}{lcclll}
 & (1) & \varphi & = & \mathit{TRUE} & \\
\mathit{oder} & (2) & \varphi & = & t_1 \equiv t_2 & \text{und } I(t_1) = I(t_2) \\
\mathit{oder} & (3) & \varphi & = & \neg\varphi_1 & \text{und } I \not\models \varphi_1 \\
\mathit{oder} & (4) & \varphi & = & \varphi_1 \wedge \varphi_2 & \text{und } I \models \varphi_1 \text{ und } I \models \varphi_2 \\
\mathit{oder} & (5) & \varphi & = & \forall x : s \;\; \varphi_1 & \text{und } I[\![x/\mathbf{a}]\!] \models \varphi_1 \text{ für alle } \mathbf{a} \in \mathcal{A}_s.
\end{array}$$

Aus Formelmenge $\Phi$ *folgt* die Formel $\varphi$ ("$\Phi \models \varphi$") gdw.
für alle Interpretationen $I$ mit $I \models \Phi$ gilt $I \models \varphi$.

*Theorie* einer Interpretation:

$$Th(I) = \{\varphi \in \mathcal{F}(\Sigma, \mathcal{V}) \,|\, \varphi \text{ ist geschlossen und } I \models \varphi\}$$

$$
\begin{array}{lll}
\textbf{structure} & \multicolumn{2}{l}{\mathsf{bool}} \\
\quad \mathsf{true} & : & \mathsf{bool} \\
\quad \mathsf{false} & : & \mathsf{bool}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
\textbf{structure} & \multicolumn{2}{l}{\mathsf{number}} \\
\quad \mathcal{O} & : & \mathsf{number} \\
\quad \mathsf{succ} & : & \mathsf{number} \longrightarrow \mathsf{number}
\end{array}
$$

$$
\textbf{function} \;\; \mathsf{plus} : \mathsf{number} \times \mathsf{number} \longrightarrow \mathsf{number}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathsf{plus}(\mathcal{O}, y) &\equiv y \\
\mathsf{plus}(\mathsf{succ}(x), y) &\equiv \mathsf{succ}(\mathsf{plus}(x, y))
\end{aligned}
$$

$$
\textbf{function} \;\; \mathsf{times} : \mathsf{number} \times \mathsf{number} \longrightarrow \mathsf{number}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathsf{times}(\mathcal{O}, y) &\equiv \mathcal{O} \\
\mathsf{times}(\mathsf{succ}(x), y) &\equiv \mathsf{plus}(y, \mathsf{times}(x, y))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\textbf{function}\ \ \mathsf{pred} : \mathsf{number} \to \mathsf{number}\\
&\quad \mathsf{pred}(\mathcal{O}) \equiv \mathcal{O}\\
&\quad \mathsf{pred}(\mathsf{succ}(x)) \equiv x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\textbf{function}\ \ \mathsf{minus} : \mathsf{number} \times \mathsf{number} \to \mathsf{number}\\
&\quad \mathsf{minus}(x, \mathcal{O}) \equiv x\\
&\quad \mathsf{minus}(x, \mathsf{succ}(y)) \equiv \mathsf{minus}(\mathsf{pred}(x), y)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\textbf{function}\ \ \mathsf{ge} : \mathsf{number} \times \mathsf{number} \to \mathsf{bool}\\
&\quad \mathsf{ge}(x, \mathcal{O}) \equiv \mathsf{true}\\
&\quad \mathsf{ge}(\mathcal{O}, \mathsf{succ}(y)) \equiv \mathsf{false}\\
&\quad \mathsf{ge}(\mathsf{succ}(x), \mathsf{succ}(y)) \equiv \mathsf{ge}(x, y)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\textbf{function}\ \ \mathsf{if} : \mathsf{bool} \times \mathsf{number} \times \mathsf{number} \to \mathsf{number}\\
&\quad \mathsf{if}(\mathsf{true}, x, y) \equiv x\\
&\quad \mathsf{if}(\mathsf{false}, x, y) \equiv y
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\textbf{function}\ \ \mathsf{gcd} : \mathsf{number} \times \mathsf{number} \to \mathsf{number}\\
&\quad \mathsf{gcd}(x, \mathcal{O}) \equiv x\\
&\quad \mathsf{gcd}(\mathcal{O}, \mathsf{succ}(y)) \equiv \mathsf{succ}(y)\\
&\quad \mathsf{gcd}(\mathsf{succ}(x), \mathsf{succ}(y)) \equiv \mathsf{if}(\mathsf{ge}(x, y),\\
&\qquad\qquad \mathsf{gcd}(\mathsf{minus}(x, y), \mathsf{succ}(y)),\\
&\qquad\qquad \mathsf{gcd}(\mathsf{succ}(x), \mathsf{minus}(y, x)))
\end{aligned}
$$