Beweisansatz (Satz 4.2.1)

Falls $AX_P \subseteq Th_P$ und $AX_P \vdash_K \varphi$, dann gilt $\varphi \in Th_P$.

Erster Ansatz: AX_P: definierende Gleichungen E_P

Aber:

$AX_P \not\models \ \forall x_1, x_2, x_3 : \text{number} \ \ \text{plus}(x_1, \text{plus}(x_2, x_3)) \equiv \text{plus}(\text{plus}(x_1, x_2), x_3)$

Gödelscher Unvollständigkeitssatz

P enthält number, plus, times, $\quad AX_P \subseteq Th_P$ entscheidbar.
Dann existiert $\varphi \in Th_P$ mit $AX_P \not\models \varphi$.

Induktionsbeweise

Zeige

$\forall x_1, x_2, x_3 : \mathsf{number}\ \ \mathsf{plus}(x_1, \mathsf{plus}(x_2, x_3)) \equiv \mathsf{plus}(\mathsf{plus}(x_1, x_2), x_3) \in Th_P$

Induktionsanfang

$\forall x_2, x_3 : \mathsf{number}\ \ \mathsf{plus}(\mathcal{O}, \mathsf{plus}(x_2, x_3)) \equiv \mathsf{plus}(\mathsf{plus}(\mathcal{O}, x_2), x_3)$

Induktionsschluss

$\forall y : \mathsf{number}$

$$(\forall x_2, x_3 : \mathsf{number}\ \ \mathsf{plus}(\ y\ , \mathsf{plus}(x_2, x_3)) \equiv \mathsf{plus}(\mathsf{plus}(\ y\ , x_2), x_3))$$

$$\rightarrow (\forall x_2, x_3 : \mathsf{number}\ \ \mathsf{plus}(\mathsf{s}(y), \mathsf{plus}(x_2, x_3)) \equiv \mathsf{plus}(\mathsf{plus}(\mathsf{s}(y), x_2), x_3))$$

structure bool

true	:	bool
false	:	bool

structure list

nil	:	list
cons	:	number $\times$ list $\rightarrow$ list

$$
AX_{\mathsf{bool}} = \begin{aligned}
\{\mathsf{true} \equiv \mathsf{true} \quad &\leftrightarrow \quad TRUE,\\
\mathsf{false} \equiv \mathsf{false} \quad &\leftrightarrow \quad TRUE,\\
\mathsf{true} \equiv \mathsf{false} \quad &\leftrightarrow \quad FALSE,\\
\mathsf{false} \equiv \mathsf{true} \quad &\leftrightarrow \quad FALSE\}
\end{aligned}
$$

$$
AX_{\mathsf{list}} = \begin{aligned}
\{\mathsf{nil} \equiv \mathsf{nil} \quad &\leftrightarrow \quad TRUE,\\
\forall x, y : \mathsf{number}, l, k : \mathsf{list} \;\; \mathsf{cons}(x, l) \equiv \mathsf{cons}(y, k) \quad &\leftrightarrow \quad x \equiv y \;\wedge\; l \equiv k,\\
\forall y : \mathsf{number}, k : \mathsf{list} \;\; \mathsf{nil} \equiv \mathsf{cons}(y, k) \quad &\leftrightarrow \quad FALSE,\\
\forall x : \mathsf{number}, l : \mathsf{list} \;\; \mathsf{cons}(x, l) \equiv \mathsf{nil} \quad &\leftrightarrow \quad FALSE\}
\end{aligned}
$$

Def. 5.1.1 (Axiome AX_P zu einem Programm)

Zu einer Datenstruktur-Definition

$$\begin{array}{lll} \multicolumn{3}{l}{\textbf{structure } s} \\ cons_1 & : & s_{1,1} \times \ldots \times s_{1,n_1} \to s \\ & \vdots & \\ cons_m & : & s_{m,1} \times \ldots \times s_{m,n_m} \to s \end{array}$$

definieren wir

$$\begin{array}{llll} \{\forall x^*, y^* : w & cons_i(x^*) \equiv cons_i(y^*) & \leftrightarrow x_1 \equiv y_1 \wedge \ldots \wedge x_{n_i} \equiv y_{n_i} & | 1 \leq i \leq m\} \cup \\ \{\forall x^* : w, y^* : v & cons_i(x^*) \equiv cons_{i'}(y^*) & \leftrightarrow FALSE & | i, i' \in \{1, \ldots, m\}, i \neq i'\}. \end{array}$$

Hierbei sei $w = s_{i,1}, \ldots, s_{i,n_i}$ und $v = s_{i',1}, \ldots, s_{i',n_{i'}}$.

Für ein Programm P mit den Datenstrukturen $s_1, \ldots, s_h$ definieren wir

$$\begin{array}{ll} AX_P & = AX_{s_1} \cup \ldots \cup AX_{s_h} \cup \\ & \quad \{\forall x^* : w \;\; l \equiv r \mid l \equiv r \in E_P, \; x^* \text{ sind die Variablen in } l\}. \end{array}$$

Def. 5.1.3 (Termersetzungskalkül K)
Φ: Menge universeller Gleichungen u. universeller Äquivalenzen $\forall x^* : w \;\; \xi_1 \leftrightarrow \xi_2$.

Definiere die zugehörige Termersetzungs-Relation $\rightarrow_\Phi$:
$\psi_1 \rightarrow_\Phi \psi_2$ für quantorfreie Formeln ψ_1 und ψ_2 gdw. es ex. $\pi \in Occ(\psi_1)$ mit

- $\psi_1|_\pi = \sigma(l)$ und $\psi_2 = \psi_1[\sigma(r)]_\pi$ für Gleichung $\forall x^* : w \; l \equiv r \in \Phi$ und Substitution σ oder
- $\psi_1|_\pi = \sigma(\xi_1)$ und $\psi_2 = \psi_1[\sigma(\xi_2)]_\pi$ für Äquivalenz $\forall x^* : w \;\; \xi_1 \leftrightarrow \xi_2 \;\in\; \Phi$ u. Subst. σ oder
- $\psi_1|_\pi = (t \equiv t)$ und $\psi_2 = \psi_1[TRUE]_\pi$ für einen Term t oder
- ($\psi_1|_\pi = \xi \wedge TRUE$ oder $\psi_1|_\pi = TRUE \wedge \xi$) und $\psi_2 = \psi_1[\xi]_\pi$ für Formel ξ oder
- $(\psi_1|_\pi = \xi \wedge FALSE$ oder $\psi_1|_\pi = FALSE \wedge \xi)$ und $\psi_2 = \psi_1[FALSE]_\pi$ f. Fml. ξ oder
- $\psi_1|_\pi = \neg FALSE$ und $\psi_2 = \psi_1[TRUE]_\pi$.

Termersetzungskalkül K: $\quad \Phi \vdash_K \forall\psi$ gdw. $\psi \rightarrow_\Phi^* TRUE$
für alle quantorfreien Formeln ψ.