APV 03 - Lösungsvorschlag zur 7. Übung

Aufgabe 1

a) $\psi := \mathsf{le}(\mathsf{double}(\mathsf{half}(\mathsf{succ}(\mathsf{succ}(y))), \mathsf{succ}(\mathsf{succ}(y)))) \;\equiv\; \mathsf{true}$
$\Psi := \{\forall x : \mathsf{number}\ \mathsf{le}(\mathsf{double}(\mathsf{half}(x)), x) \;\equiv\; \mathsf{true}\}$

$\mathsf{SA}_P(\psi, \Psi)$:

1: $\mathsf{le}(\mathsf{double}(\underline{\mathsf{half}(\mathsf{succ}(\mathsf{succ}(y)))}), \mathsf{succ}(\mathsf{succ}(y))) \equiv \mathsf{true}$

$\to_P$ $\mathsf{le}(\underline{\mathsf{double}(\mathsf{succ}(\mathsf{half}(y))}), \mathsf{succ}(\mathsf{succ}(y))) \equiv \mathsf{true}$

$\to_P$ $\underline{\mathsf{le}(\mathsf{succ}(\mathsf{succ}(\mathsf{double}(\mathsf{half}(y)))), \mathsf{succ}(\mathsf{succ}(y)))} \equiv \mathsf{true}$

$\to_P$ $\underline{\mathsf{le}(\mathsf{succ}(\mathsf{double}(\mathsf{half}(y))), \mathsf{succ}(y))} \equiv \mathsf{true}$

$\to_P$ $\mathsf{le}(\mathsf{double}(\mathsf{half}(y)), y) \equiv \mathsf{true} \quad =: \psi$

3: Wähle $\forall x : \mathsf{number}\ \mathsf{le}(\mathsf{double}(\mathsf{half}(x)), x) \equiv \mathsf{true}$ aus Ψ

4: $\Psi := \emptyset$

5: $\psi := \mathit{TRUE}$ (nach Anwendung der Hypothese aus 3. mit $\pi = \varepsilon$, $\sigma = \{x/y\}$,
da $(\mathsf{le}(\mathsf{double}(\mathsf{half}(y)), y) \equiv \mathsf{true})|_\pi = \sigma(\mathsf{le}(\mathsf{double}(\mathsf{half}(x)), x) \equiv \mathsf{true})$
und $(\mathsf{le}(\mathsf{double}(\mathsf{half}(y)), y) \equiv \mathsf{true})[\mathit{TRUE}]_\pi = \mathit{TRUE}$

1: $\mathit{TRUE} = \mathit{TRUE} \downarrow_P \;=: \psi$

2: liefere TRUE zurück

$\rightsquigarrow \mathsf{SA}_P(\psi, \Psi) = \mathit{TRUE}$

b) $\psi := \mathsf{le}(\mathsf{double}(\mathsf{half}(\mathsf{succ}(y))), \mathsf{succ}(y)) \;\equiv\; \mathsf{true}$
$\Psi := \{\forall x : \mathsf{number}\ \mathsf{le}(\mathsf{double}(\mathsf{half}(x)), x) \;\equiv\; \mathsf{true}\}$

$\mathsf{SA}_P(\psi, \Psi)$:

1: $\mathsf{le}(\mathsf{double}(\mathsf{half}(\mathsf{succ}(y))), \mathsf{succ}(y)) \equiv \mathsf{true}$
$= \mathsf{le}(\mathsf{double}(\mathsf{half}(\mathsf{succ}(y))), \mathsf{succ}(y)) \equiv \mathsf{true} \downarrow_P \;=: \psi$

3: Wähle $\forall x : \mathsf{number}\ \mathsf{le}(\mathsf{double}(\mathsf{half}(x)), x) \equiv \mathsf{true}$ aus Ψ

4: $\Psi := \emptyset$

5: $\psi := \mathit{TRUE}$ (nach Anwendung der Hypothese aus 3. mit $\pi = \varepsilon$, $\sigma = \{x/\mathsf{succ}(y)\}$,
da $(\mathsf{le}(\mathsf{double}(\mathsf{half}(\mathsf{succ}(y))), \mathsf{succ}(y)) \equiv \mathsf{true})|_\pi = \sigma(\mathsf{le}(\mathsf{double}(\mathsf{half}(x)), x) \equiv \mathsf{true})$
und $(\mathsf{le}(\mathsf{double}(\mathsf{half}(\mathsf{succ}(y))), \mathsf{succ}(y)) \equiv \mathsf{true})[\mathit{TRUE}]_\pi = \mathit{TRUE}$

1: $\mathit{TRUE} = \mathit{TRUE} \downarrow_P \;=: \psi$

2: liefere TRUE zurück

$\rightsquigarrow \mathsf{SA}_P(\psi, \Psi) = \mathit{TRUE}$

Aufgabe 2

Wir zeigen (nach Peano-Induktion):

1. $\psi[x_2/\mathcal{O}] \in Th_P$
2. $\forall y : \mathsf{number}\ (\psi[x_2/y] \rightarrow \psi[x_2/\mathsf{succ}(y)]) \in Th_P$

mit $\psi = \forall x_1, x_3 : \mathsf{number}\ \ \mathsf{minus}(x_1, \mathsf{plus}(x_2, x_3)) \equiv \mathsf{minus}(\mathsf{minus}(x_1, x_2), x_3)$

Zu 1.: Es gilt

$$\mathsf{minus}(x_1, \underline{\mathsf{plus}(\mathcal{O}, x_3)}) \equiv \mathsf{minus}(\mathsf{minus}(x_1, \mathcal{O}), x_3)$$

$$\rightarrow_P\ \ \mathsf{minus}(x_1, x_3) \equiv \mathsf{minus}(\underline{\mathsf{minus}(x_1, \mathcal{O})}, x_3)$$

$$\rightarrow_P\ \ \underline{\mathsf{minus}(x_1, x_3) \equiv \mathsf{minus}(x_1, x_3)}$$

$$\rightarrow_P\ \ TRUE$$

und damit $\psi[x_2/\mathcal{O}] \in Th_P$.

Zu 2.: Es gilt

$$\mathsf{minus}(x_1, \underline{\mathsf{plus}(\mathsf{succ}(y), x_3)}) \equiv \mathsf{minus}(\mathsf{minus}(x_1, \mathsf{succ}(y)), x_3)$$

$$\rightarrow_P\ \ \underline{\mathsf{minus}(x_1, \mathsf{succ}(\mathsf{plus}(y, x_3)))} \equiv \mathsf{minus}(\mathsf{minus}(x_1, \mathsf{succ}(y)), x_3)$$

$$\rightarrow_P\ \ \mathsf{minus}(\mathsf{pred}(x_1), \mathsf{plus}(y, x_3)) \equiv \mathsf{minus}(\underline{\mathsf{minus}(x_1, \mathsf{succ}(y))}, x_3)$$

$$\rightarrow_P\ \ \mathsf{minus}(\mathsf{pred}(x_1), \mathsf{plus}(y, x_3)) \equiv \mathsf{minus}(\mathsf{minus}(\mathsf{pred}(x_1), y), x_3)$$

Die Anwendung der Induktionshypothese
$\forall x_1, x_3 : \mathsf{number}\ \ \mathsf{minus}(x_1, \mathsf{plus}(y, x_3)) \equiv \mathsf{minus}(\mathsf{minus}(x_1, y), x_3)$
auf die obige Formel an der Stelle ε und mit $\sigma = \{x_1/\mathsf{pred}(x_1)\}$ ergibt $TRUE$.

Damit ist $\forall y : \mathsf{number}\ (\psi[x_2/y] \rightarrow \psi[x_2/\mathsf{succ}(y)]) \in Th_P$.

Aufgabe 3

a) Mit Peano-Induktion über x erhält man die beiden Induktionsformeln

ψ_1: $\mathsf{le}(\mathsf{double}(\mathsf{half}(\mathcal{O})), \mathcal{O}) \equiv \mathsf{true}$

ψ_2: $\forall y : \mathsf{number}\,(\mathsf{le}(\mathsf{double}(\mathsf{half}(y)), y) \equiv \mathsf{true} \rightarrow \mathsf{le}(\mathsf{double}(\mathsf{half}(\mathsf{succ}(y))), \mathsf{succ}(y)) \equiv \mathsf{true})$

Die symbolische Auswertung liefert für ψ_1

$$\mathsf{le}(\mathsf{double}(\mathsf{half}(\mathcal{O})), \mathcal{O}) \equiv \mathsf{true} \rightarrow_P^2 \mathsf{le}(\mathcal{O}, \mathcal{O}) \equiv \mathsf{true} \rightarrow_P^2 \mathit{TRUE}$$

und für ψ_2 mit der Induktionshypothese $\mathsf{le}(\mathsf{double}(\mathsf{half}(y)), y) \equiv \mathsf{true}$

$$\mathsf{le}(\mathsf{double}(\mathsf{half}(\mathsf{succ}(y))), \mathsf{succ}(y)) \equiv \mathsf{true}$$

$$\overset{I.H.}{\rightarrow} \mathsf{le}(\mathsf{double}(\mathsf{half}(\mathsf{succ}(y))), \mathsf{succ}(y)) \equiv \mathsf{le}(\mathsf{double}(\mathsf{half}(y)), y) \not\rightarrow_P$$

Bemerkung: Die Induktionshypothese ist nicht auf der linken Seite der Gleichung (mit $\sigma = \{y/\mathsf{succ}(y)\}$) anwendbar, da y nicht allquantifiziert ist.

Da ψ_2 nicht zu *TRUE* ausgewertet werden konnte, ist uns der Beweis mit Peano-Induktion nicht gelungen.

b) Bezeichne $|q|$ die Anzahl der Symbole des Terms q. Dann gilt mit $q \succ p$ auch $|q| >_{\mathbb{N}} |p|$ und damit $\succ \subseteq \rightarrow_{||}$ für die Relation $\rightarrow_{||}$ mit $t \rightarrow_{||} r$ gdw. $|t| >_{\mathbb{N}} |r|$. Da $\rightarrow_{||}$ (Bsp. 2.3.3) fundiert ist, ist auch $\succ$ fundiert.

c) Mit der Relation $\succ$ erhält man die folgenden Induktionsformeln:

ψ_1: $\mathsf{le}(\mathsf{double}(\mathsf{half}(\mathcal{O})), \mathcal{O}) \equiv \mathsf{true}$

ψ_2: $\mathsf{le}(\mathsf{double}(\mathsf{half}(\mathsf{succ}(\mathcal{O}))), \mathsf{succ}(\mathcal{O})) \equiv \mathsf{true}$

ψ_3: $\forall y : \mathsf{number}\,(\mathsf{le}(\mathsf{double}(\mathsf{half}(y)), y) \equiv \mathsf{true}$
$\rightarrow \mathsf{le}(\mathsf{double}(\mathsf{half}(\mathsf{succ}(\mathsf{succ}(y)))), \mathsf{succ}(\mathsf{succ}(y))) \equiv \mathsf{true})$

Die symbolische Auswertung von ψ_1 liefert wie in a) *TRUE* und für ψ_2:
$\mathsf{le}(\mathsf{double}(\mathsf{half}(\mathsf{succ}(\mathcal{O}))), \mathsf{succ}(\mathcal{O})) \equiv \mathsf{true} \rightarrow_P^2 \mathsf{le}(\mathcal{O}, \mathsf{succ}(\mathcal{O})) \equiv \mathsf{true} \rightarrow_P^2 \mathit{TRUE}$.

Die Auswertung von ψ_3 unter der Hypothese $\mathsf{le}(\mathsf{double}(\mathsf{half}(y)), y) \equiv \mathsf{true}$ liefert:
$\mathsf{le}(\mathsf{double}(\mathsf{half}(\mathsf{succ}(\mathsf{succ}(y)))), \mathsf{succ}(\mathsf{succ}(y))) \equiv \mathsf{true} \rightarrow_P^4 \mathsf{le}(\mathsf{double}(\mathsf{half}(y)), y) \equiv \mathsf{true}$
$\overset{I.H.}{\rightarrow} \mathit{TRUE}$.

Damit ist $\varphi \in Th_P$ bewiesen.