Prof. Dr. J. Giesl

M. Brockschmidt, F. Emmes, C. Fuhs, C. Otto, T. Ströder

Vorname: ______________________________

Nachname: ______________________________

Matrikelnummer: ______________________________

Studiengang (bitte ankreuzen):

○ Informatik Bachelor
○ Informatik Master (Auflage)
○ Mathematik Bachelor
○ Technik-Kommunikation M.A.
○ Informatik Lehramt
○ Informatik Promotion (Auflage)
○ Technik-Kommunikation Bachelor
○ Sonstige: ____________________

	Anzahl Punkte	**Erreichte Punkte**
Aufgabe 1	**6**	
Aufgabe 2	**3**	
Aufgabe 3	**8**	
Aufgabe 4	**4**	
Aufgabe 5	**4**	
Aufgabe 6	**6**	
Aufgabe 7	**2**	
Aufgabe 8	**2**	
Summe	**35**	

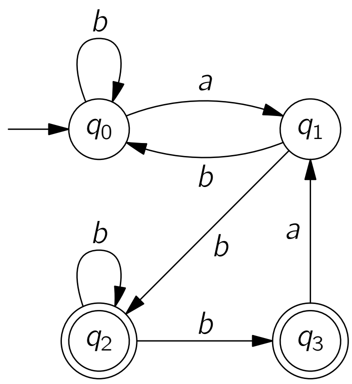
Hinweise:

- Geben Sie Ihre Antworten in lesbarer und verständlicher Form an.
- Schreiben Sie mit dokumentenechten Stiften, nicht mit roten oder grünen Stiften und nicht mit Bleistiften.
- Bitte beantworten Sie die Aufgaben auf den Aufgabenblättern (benutzen Sie auch die Rückseiten).
- **Auf alle Blätter** (inklusive zusätzliche Blätter) müssen Sie **Ihren Vornamen, Ihren Nachnamen und Ihre Matrikelnummer** schreiben.
- Was nicht bewertet werden soll, streichen Sie bitte durch.
- Werden **Täuschungsversuche** beobachtet, so wird die Klausur mit **0 Punkten** bewertet.
- Geben Sie am Ende der Klausur **alle Blätter zusammen mit den Aufgabenblättern ab**.

Aufgabe 1 (Endliche Automaten): **(3 + 3 = 6 Punkte)**

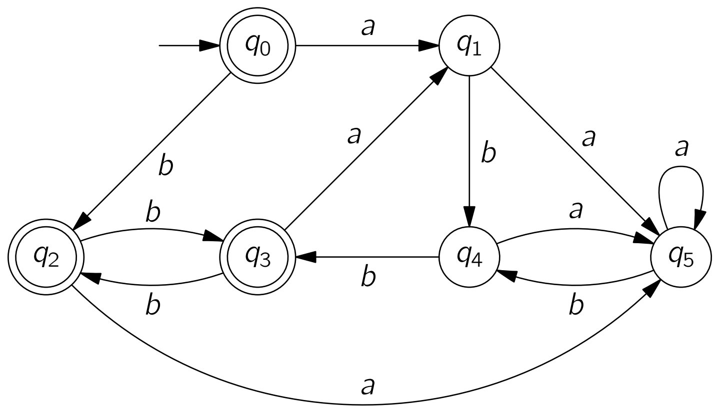
Sei $\Sigma = \{a, b\}$ ein Alphabet.

a) Betrachten Sie den folgenden NFA M_1.



Überführen Sie den NFA M_1 in einen DFA M_1' mit $L(M_1) = L(M_1')$, indem Sie den Potenzautomaten zu M_1 bilden.

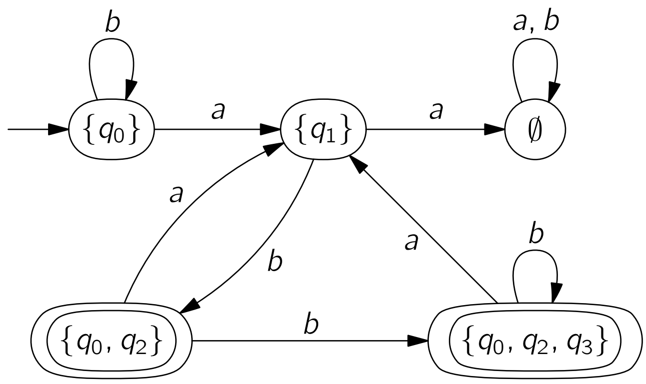
b) Betrachten Sie den folgenden DFA M_2.



Bestimmen Sie unter Verwendung eines der beiden Minimierungsverfahren aus der Vorlesung den minimalen DFA M_2' mit $L(M_2) = L(M_2')$. Geben Sie dabei sowohl die bei der Ausführung des Algorithmus entstehende Tabelle als auch eine graphische Darstellung des minimalen DFA M_2' an.

Lösung:

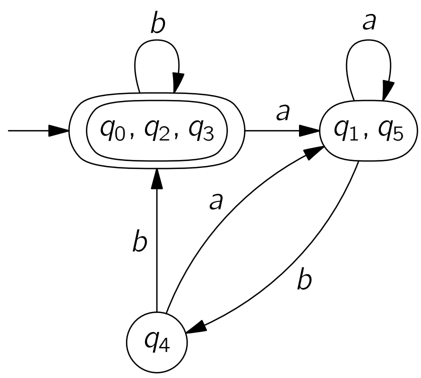
a) Wir wenden die Potenzmengenkonstruktion auf den NFA M_1 an und erhalten den folgenden DFA M_1'.



b) Tabelle des Markierungsalgorithmus:

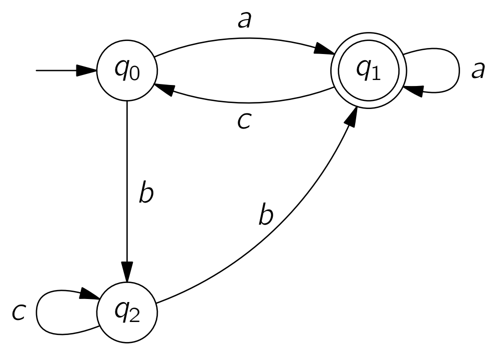
	0	1	2	3	4
1	×				
2		×			
3		×			
4	×	×	×	×	
5	×		×	×	×

Aus der Tabelle ergibt sich der folgende minimale DFA:



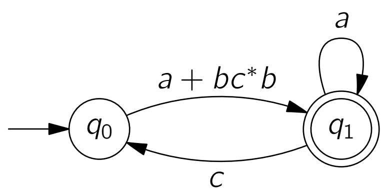
Aufgabe 2 (NFAs und reguläre Ausdrücke): **(3 Punkte)**

Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$ ein Alphabet. Wandeln Sie folgenden NFA über Σ in einen äquivalenten regulären Ausdruck um, indem Sie Zustände schrittweise entfernen und die betroffenen Kanten durch reguläre Ausdrücke ersetzen. Geben Sie hierzu zunächst den resultierenden Automaten nach Entfernung von q_2 an und geben Sie danach den zum Schluss abgelesenen regulären Ausdruck an.



Lösung:

Im ersten Schritt entfernen wir den Zustand q_2.



Der resultierende Ausdruck ist:

$$(a + bc^*b)(a + c(a + bc^*b))^*$$

Eine alternative Lösung ist:

$$(a + bc^*b)a^*(c(a + bc^*b)a^*)^*$$

Aufgabe 3 (Induktionsbeweis): **(3 + 5 = 8 Punkte)**

Sei T ein Alphabet von Terminalsymbolen, N eine Menge von Nonterminalsymbolen und $\sigma : T \to T$ eine Permutation über T. Beispielsweise wäre für $T_0 = \{a, b, c\}$ die Funktion σ_0 mit $\sigma_0(a) = b$, $\sigma_0(b) = c$ und $\sigma_0(c) = a$ eine Permutation.
Wir erweitern σ zu einer Funktion $\overline{\sigma} : (T \cup N)^* \to (T \cup N)^*$ auf Wörtern von Terminal- und Nonterminalsymbolen, indem wir Symbole aus T einzeln permutieren und Symbole aus N unverändert lassen:

$$\overline{\sigma}(w) = \begin{cases} \overline{\sigma}(w') \cdot \sigma(a) & \text{, falls } w = w' \cdot a \text{ mit } a \in T, w' \in (T \cup N)^* \\ \overline{\sigma}(w') \cdot A & \text{, falls } w = w' \cdot A \text{ mit } A \in N, w' \in (T \cup N)^* \\ \epsilon & \text{, falls } w = \epsilon \end{cases}$$

Für σ_0 wie oben und Nonterminale A, B, C gilt also $\overline{\sigma_0}(aAbBcC) = bAcBaC$.
Zu jeder kontextfreien Grammatik $G = (N, T, P, S)$ in **Chomsky-Normalform** erstellen wir nun eine kontextfreie Grammatik $\overline{G} = (N, T, \overline{P}, S)$, die die permutierten Wörter erkennen soll. Dafür definieren wir $\overline{P}$ wie folgt: Es gilt $A \to w \in P$ genau dann, wenn $A \to \overline{\sigma}(w) \in \overline{P}$ gilt.

a) Beweisen Sie zunächst, dass $\overline{\sigma}(w) = w$ für alle $w \in N^*$ gilt und verwenden Sie dabei Induktion über die Wortlänge $|w|$.

b) Beweisen Sie nun, dass $L(\overline{G}) \subseteq \{\overline{\sigma}(w) \mid w \in L(G)\}$ gilt, indem Sie zeigen, dass für alle $A \in N$, $w \in (T \cup N)^*$ aus $A \Rightarrow^n_G w$ auch $A \Rightarrow^n_{\overline{G}} \overline{\sigma}(w)$ folgt. [1] Verwenden Sie dazu Induktion über die Ableitungslänge n.

Sie dürfen dazu verwenden, dass $\overline{\sigma}(w) \cdot \overline{\sigma}(w') = \overline{\sigma}(w \cdot w')$ für alle $w, w' \in (T \cup N)^*$ gilt.

Hinweise:

- Im Induktionsschluss betrachtet man den Fall $n \geq 1$. Hier soll man als **Induktionshypothese** voraussetzen, dass die zu beweisende Aussage **für alle** n' mit $0 \leq n' < n$ gilt.
- Trennen Sie im Induktionsschritt die Ableitung $A \Rightarrow^n_G w$ in $A \Rightarrow^1_G w' \Rightarrow^{n-1}_G w$ auf und nutzen Sie aus, dass G in CNF ist.

Lösung:

a) Im Induktionsanfang ist $w = \epsilon$ und es gilt $\overline{\sigma}(\epsilon) = \epsilon$ nach Konstruktion.

Im Induktionsschluss betrachten wir $w = w' \cdot A$ für ein $A \in N$ und setzen voraus, dass die Aussage für $w' \in N^*$ bereits gilt.

Dann gilt $\overline{\sigma}(w) = \overline{\sigma}(w' \cdot A) \overset{\text{Def.}\overline{\sigma}}{=} \overline{\sigma}(w') \cdot A \overset{\text{I.H.}}{=} w' \cdot A = w$.

Nach dem Induktionsprinzip ist die Aussage damit bewiesen.

[1] Hierbei bedeutet $A \Rightarrow^n_G w$, dass man das Wort w in n Ableitungsschritten mit der Grammatik G aus dem Nonterminalsymbol A erreichen kann.

b) Im Induktionsanfang ist $n = 0$ und es gilt $A \Rightarrow_G^0 A$ und $A \Rightarrow_{\overline{G}}^0 A = \overline{\sigma}(A)$.

Im Induktionsschluss betrachten wir die Ableitungslänge $n \geq 1$ und nehmen als Induktionshypothese an, dass die Aussage bereits für alle n' mit $0 \leq n' < n$ gezeigt wurde.

Nun können wir die Ableitung $A \Rightarrow_G^n w$ in $A \Rightarrow_G^1 w' \Rightarrow_G^{n-1} w$ zerlegen. Da G in CNF ist, gilt entweder $w' = a \in T$ oder $w' = BC \in N^2$.

<u>Fall $w' = a \in T$</u>: Es folgt $n = 1$ und $w = w'$. Es gibt eine Produktion $A \to a \in P$ und damit nach Konstruktion auch $A \to \overline{\sigma}(a) \in \overline{P}$. Damit können wir $A \Rightarrow_{\overline{G}}^1 \overline{\sigma}(a)$ folgern.

<u>Fall $w' = BC \in N^2$</u>: Es gibt eine Produktion $A \to BC \in P$ und damit nach Konstruktion auch $A \to \overline{\sigma}(BC) \in \overline{P}$. Nach Teil (a) gilt $\overline{\sigma}(BC) = BC$ und damit $A \to BC \in \overline{P}$.

Für die restlichen $n - 1$ Ableitungsschritte können wir die Teilableitungen $B \Rightarrow_G^k w_B$ und $C \Rightarrow_G^\ell w_C$ mit $w = w_B \cdot w_C$ und $k + \ell = n - 1$ betrachten. Nach I.H. gilt $B \Rightarrow_{\overline{G}}^k \overline{\sigma}(w_B)$ und $C \Rightarrow_{\overline{G}}^\ell \overline{\sigma}(w_C)$. Damit können wir $A \Rightarrow_G w' = BC \Rightarrow_G^{n-1} w_B w_C$ und $A \Rightarrow_{\overline{G}} w' = BC \Rightarrow_{\overline{G}}^{n-1} \overline{\sigma}(w_B)\overline{\sigma}(w_C)$ folgern. Nach Aufgabenstellung gilt $\overline{\sigma}(w_B)\overline{\sigma}(w_C) = \overline{\sigma}(w_b \cdot w_c) = \overline{\sigma}(w)$.

Nach dem Induktionsprinzip ist die Aussage damit bewiesen.

Aufgabe 4 (Unproduktive Symbole): **(2 + 2 = 4 Punkte)**

Sei $G := (N, T, P, S)$ eine kontextfreie Grammatik mit $N := \{S, A, B, C\}, T := \{a, b, c\}$ und P wie folgt:

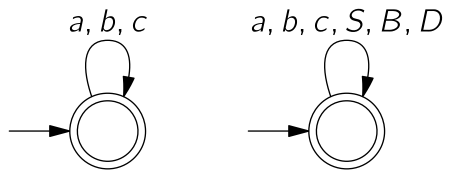
$$
\begin{array}{lcl}
S & \to & aS \mid bAB \mid b \\
A & \to & aA \mid aC \\
B & \to & bSB \mid b \\
C & \to & cA \\
D & \to & cSB
\end{array}
$$

a) Ermitteln sie die Menge $\{Z \in N \mid \text{es gibt kein } w \in T^* \text{ mit } Z \Rightarrow^* w\}$ der unproduktiven Nonterminale mit Hilfe des in der Vorlesung vorgestellten Verfahrens. Geben Sie als Zwischenergebnis auch den NFA für die Sprache $pre^*(T^*)$ an.

b) Geben Sie die Produktionen einer zu G äquivalente Grammatik G' an, in denen nur noch produktive, vom Startsymbol S aus erreichbare Nonterminale und Terminale verwendet werden und aus denen unproduktive Nonterminale entfernt wurden.

Lösung:

a) Zuerst berechnen wir den NFA zur Erkennung von T^* und daraus den NFA für $pre_G^*(T^*)$.



Die Menge der unproduktiven Symbolen ist nun $N \setminus pre^*(T^*) = \{A, C\}$.

b) Wir erzeugen eine Grammatik, in der keine rechten Seiten mehr auftreten, die A oder C enthalten:

$$
\begin{array}{lcl}
S & \to & aS \mid b \\
B & \to & bSB \mid b \\
D & \to & cSB
\end{array}
$$

Man kann aber D von S aus nicht erreichen. Außerdem kann man auch B nicht mehr von S erreichen und wir können daher die D- und B-Produktionen entfernen:

$$S \to aS \mid b$$

Aufgabe 5 (CYK-Algorithmus): **(4 Punkte)**

Gegeben sei die folgende Grammatik G in Chomsky-Normalform.

$$\begin{array}{rcl} S & \to & b \mid BC \\ A & \to & a \mid SC \\ B & \to & c \mid SC \mid AS \\ C & \to & c \mid CA \mid AB \end{array}$$

Testen Sie mit dem CYK-Algorithmus, ob das Wort $w = abcc$ in $L(G)$ liegt.

Lösung:

$w =$	a	b	c	c
1	A	S	B, C	B, C
2	B	A, B	S	
3	C, S	C, S		
4	B, A			

$\Rightarrow w \notin L(G)$

Aufgabe 6 (Pumping-Lemma): **(3 + 3 = 6 Punkte)**

Wir erinnern an das reguläre Pumping-Lemma:
Sei L eine reguläre Sprache. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}_0$, so dass jedes Wort $w \in L$ mit $|w| \geq n$ in $w = xyz$ zerlegt werden kann mit

- $|xy| \leq n$
- $|y| > 0$
- $xy^i z \in L$ für alle $i \geq 0$

a) Betrachten Sie die Sprache $L_1 = \{a^k b^\ell c^\ell \mid k, \ell \geq 0\}$.

Beweisen Sie mithilfe des Pumping-Lemmas für reguläre Sprachen, dass L_1 nicht regulär ist.

b) Die Sprache $L_2 = \{a^i b^j c^k \mid i, j, k \geq 0 \text{ und } (i = 0 \text{ oder } j = k)\}$ ist nicht regulär. Beweisen Sie, dass L_2 trotzdem die Eigenschaften des regulären Pumping-Lemmas erfüllt.

Hinweis: Um dies nachzuweisen, muss man eine Grenze n wählen und eine Zerlegung für jedes Wort $w \in L_2$ mit $|w| \geq n$ angeben, für die dann nachzuweisen ist, dass die Eigenschaften des Pumping-Lemmas erfüllt sind. Hierbei ist bereits $n = 1$ eine geeignete Wahl.

Lösung:

a) Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Wir wählen das Wort $w = b^n c^n \in L_1$ mit $|w| \geq n$. Sei $w = xyz$ mit $|xy| \leq n$ und $|y| > 0$. Wir wählen $i = 0$, d.h. wir wollen zeigen, dass $xy^i z \notin L_1$ gilt. Wegen $|xy| \leq n$ muss $y = b^t$ für ein $t \in \mathbb{N}$ gelten. Damit ist $w' = xz = b^{n-t} c^n$ und da $0 < |y| = t$ gilt, ist $w' \notin L_1$. Nach dem Pumping-Lemma für reguläre Sprachen ist damit L_1 nicht regulär.

b) Wir wählen $n = 1$.

Sei $w \in L_2$ mit $|w| \geq 1$. Wir wählen die Zerlegung $w = xyz$ mit $x = \epsilon$ und $|y| = 1$ (das heißt, dass y das erste Zeichen von w ist). Dann gilt $|xy| = |y| = 1 \leq n = 1$ und $|y| = 1 > 0$. Sei $i \geq 0$. Wir betrachten das Wort $w' = xy^i z = y^i z$.

Falls $y = a$, so gilt $w = a^j b^k c^k$ mit $j, k \geq 0$ und daher $w' = a^{j+i-1} b^k c^k$. Damit ist $w' \in L_2$.

Falls $y \neq a$, so gilt $w = a^0 b^j c^k$ mit $j, k \geq 0$ und $j + k > 0$ und daher entweder $w' = a^0 b^{j+i-1} c^k$ oder $w' = a^0 b^0 c^{k+i-1}$. Damit ist wiederum $w' \in L_2$.

$\square$

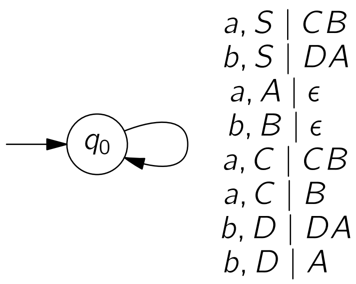
Aufgabe 7 (Kellerautomaten): (2 Punkte)

Gegeben sei die folgende Grammatik G:

$$\begin{aligned}
S &\rightarrow aCB \mid bDA \\
A &\rightarrow a \\
B &\rightarrow b \\
C &\rightarrow aCB \mid aB \\
D &\rightarrow bDA \mid bA
\end{aligned}$$

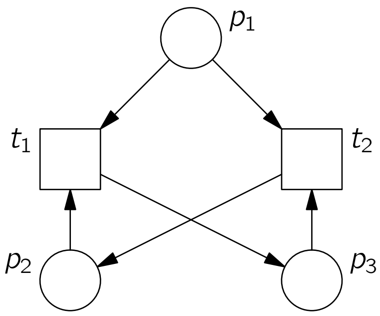
Geben Sie einen Kellerautomaten M mit höchstens 8 Transitionen an, so dass $N(M) = L(G)$ gilt.

Lösung:

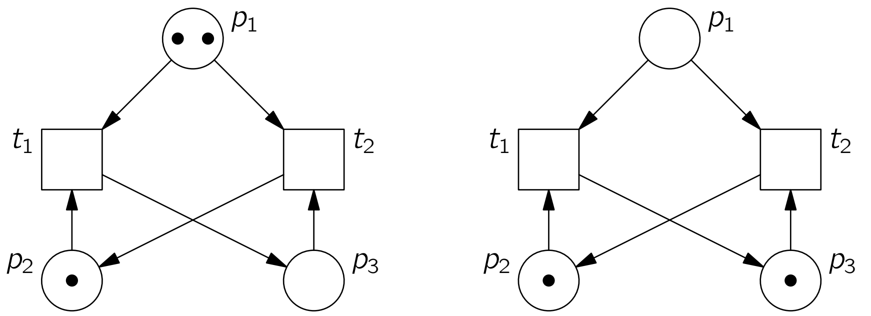


Aufgabe 8 (Petrinetze): **(2 Punkte)**

Betrachten Sie folgendes Petrinetz N.

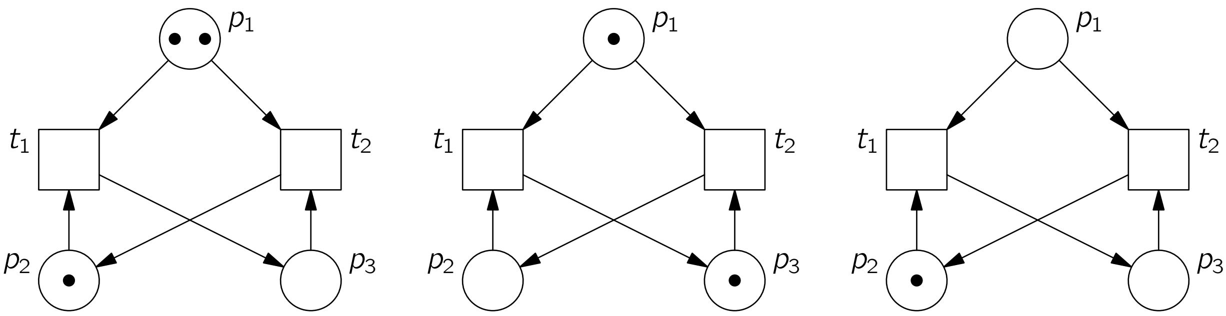


Weiterhin sei die Markierung $m = (2, 1, 0)$ für die Stellen p_1, p_2, p_3 gegeben. Untersuchen Sie nun, ob die Markierung $m' = (0, 1, 1)$ von m aus erreichbar ist und geben Sie Ihren Lösungsweg an. Graphisch lassen sich die beiden Markierungen wie folgt illustrieren:



Lösung:

Da sich das Petrinetz auf m deterministisch verhält, gibt es genau eine mögliche Folge von Konfigurationen:



Aus der letzten Konfiguration kann keine weitere Transition geschaltet werden, und die Markierung $m' = (0, 1, 1)$ war nicht unter den erreichten Konfigurationen. Daher ist m' nicht von m aus erreichbar.

Allgemeiner lässt sich die Frage mit Hilfe der Inzidenzmatrix des Petrinetzes lösen. Zuerst stellen wir dazu die Matrizen D^- und D^+ auf.

$$D^- = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad D^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Damit ergibt sich die Inzidenzmatrix

$$D = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Nun stellen wir das Gleichungssystem auf. Damit m' von m aus erreichbar ist, muss gelten, dass

$$(0,1,1) = (2,1,0) + x \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Zunächst stellen wir die Gleichung um und transponieren.

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Mit dem Gauß-Algorithmus lösen wir nun dieses lineare Gleichungssystem.

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \mid III + II \quad \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

An der letzten Zeile sehen wir, dass das Gleichungssystem keine Lösung hat, da $0 \neq 1$. Damit ist m' nicht von m aus erreichbar.