Prof. Dr. J. Giesl

M. Brockschmidt, F. Emmes, C. Fuhs, C. Otto, T. Ströder

Hinweise:

- Die **Hausaufgaben** sollen in Gruppen von je 2 Studierenden aus dem gleichen Tutorium bearbeitet werden.
- Die Lösungen der Hausaufgaben müssen bis Mi., 28.04.2010 im Tutorium abgegeben werden. Alternativ ist es bis 17 Uhr möglich, diese in den Kasten im Flur des LuFG I2 einzuwerfen (Ahornstr. 55, E1, 2. Etage).
- Namen und Matrikelnummern der Studierenden sowie **die Nummer der Übungsgruppe** sind auf jedes Blatt der Abgabe zu schreiben. **Heften bzw. tackern Sie die Blätter**!
- Die **Tutoraufgaben** werden in den jeweiligen Tutorien gemeinsam besprochen und bearbeitet.

Tutoraufgabe 1 (Erzeugendensysteme / Monoide):

Beweisen Sie: $(L((ab)^*), \cdot)$ ist ein Monoid. Hierbei bezeichnet $\cdot$ die Aneinanderkettung von Wörtern.
Hinweis: In dieser Vorlesung bezeichnet $\mathbb{N}$ die natürlichen Zahlen inklusive der 0.

Lösung:

Die Aneinanderkettung $\cdot$ ist assoziativ. Somit bleibt noch zu zeigen, dass $L((ab)^*)$ abgeschlossen unter $\cdot$ ist und das neutrale Element enthält. Seien $m, n \in \mathbb{N}$, $u = (ab)^n \in L((ab)^*)$ und $v = (ab)^m \in L((ab)^*)$. Dann gilt $u \cdot v = (ab)^{n+m} \in L((ab)^*)$. Da auch $\varepsilon = (ab)^0 \in L((ab)^*)$, ist $(L((ab)^*), \cdot)$ ein Monoid.

Hausaufgabe 2 (Erzeugendensysteme / Monoide): (2 + 4 = 6 Punkte)

a) Beweisen Sie: $(L((ab)^*), \cdot)$ ist isomorph zu $(\mathbb{N}, +)$.

b)
- Hat das Monoid $(\mathbb{N} \setminus \{0\}, *)$ ein endliches Erzeugendensystem?
- Wir nennen ein Erzeugendensystem E für ein Monoid M *minimal*, falls keine echte Teilmenge von E ein Erzeugendensystem für M ist.
  Geben Sie ein minimales Erzeugendensystem von $(\mathbb{N} \setminus \{0\}, *)$ an. Ist Ihr Erzeugendensystem frei?

Begründen Sie ihre Antworten!

Lösung:

a) Zu zeigen: Es gibt einen bijektiven Homomorphismus von $(L((ab)^*), \cdot)$ nach $(\mathbb{N}, +)$.

Sei $h : L((ab)^*) \to \mathbb{N}$ mit $h((ab)^n) = n$, dann ist h ein Homomorphismus, denn: $h((ab)^n \cdot (ab)^m) = h((ab)^{n+m}) = n+m = h((ab)^n)+h((ab)^m)$. Die Funktion h ist bijektiv, da für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $h((ab)^n) = n$ und somit die Umkehrfunktion $h^{-1} : \mathbb{N} \to L((ab)^*)$ mit $h^{-1}(n) = (ab)^n$ definiert ist.

b)
- Nein. Jedes Erzeugendensystem muss mindestens alle Primzahlen enthalten und kann daher nicht endlich sein.

- Die Menge der Primzahlen bildet ein minimales Erzeugendensystem, da jede Zahl als Multiplikation ihrer Primfaktoren dargestellt werden kann. Dies ist allerdings kein freies Erzeugendensystem, da die Multiplikation kommutativ ist. So lässt sich 6 als $2 * 3$, aber auch als $3 * 2$ darstellen.

Tutoraufgabe 3 (Homomorphismen / Isomorphismen):

Sei Σ ein beliebiges, endliches Alphabet. Beweisen oder widerlegen Sie die Existenz folgender Homomorphismen:

a) Ein Isomorphismus von $(\mathbb{R}, +)$ nach $(\mathbb{Z}, +)$.

b) Ein Isomorphismus von $(\mathbb{Z}, +)$ nach $(\mathbb{Z}, +)$, der nicht die Identität ist.

Lösung:

a) Da $\mathbb{R}$ überabzählbar unendlich ist und $\mathbb{Z}$ nur abzählbar unendlich ist, kann es keine bijektive Abbildung und damit auch keinen Isomorphismus zwischen den beiden geben.

b) Sei $h(x) = -x$. Die Funktion h ist offensichtlich eine Bijektion und es gilt $h(a + b) = -(a + b) = (-a) + (-b) = h(a) + h(b)$. Somit ist h ein Isomorphismus.

Hausaufgabe 4 (Homomorphismen / Isomorphismen): (1 + 1 + 1 + 2 = 5 Punkte)

Sei Σ ein beliebiges, endliches Alphabet. Beweisen oder widerlegen Sie die Existenz folgender Homomorphismen:

a) Ein Homomorphismus von $(\mathbb{N}, +)$ nach $(\{1\}, *)$.

b) Ein Homomorphismus von $(\Sigma^*, \cdot)$ nach $(\mathbb{N}, +)$.

c) Ein Isomorphismus von $(\{1\}, *)$ nach $(\mathbb{N}, +)$.

d) Ein injektiver Homomorphismus von $(\mathbb{N}, +)$ nach $(\mathbb{N}, *)$.

Lösung:

a) Sei $h : x \mapsto 1$, so ist h ein Homomorphismus, da $h(a + b) = 1 = 1 * 1 = h(a) * h(b)$.

b) Sei $h : x \mapsto |x|$, so ist h ein Homomorphismus, da $h(a \cdot b) = |a \cdot b| = |a| + |b| = h(a) + h(b)$. Hierbei bezeichnet $|w|$ die Länge des Wortes w.

Alternativ: Betrachte $h' : x \mapsto 0$, also die Funktion, die jedes Element von Σ^* auf das neutrale Element des Monoids $(\mathbb{N}, +)$ abbildet. Offensichtlich gilt hier die Homomorphiebedingung: $h'(a \cdot b) = 0 = 0 + 0 = h'(a) + h'(b)$.

Es kann also durchaus unterschiedliche Homomorphismen zwischen zwei Monoiden geben.

c) Es kann keinen Isomorphismus von $\{1\}$ nach $\mathbb{N}$ geben, da $|\{1\}| = 1 < |\mathbb{N}|$.

d) Sei $h : x \mapsto 2^x$. Dann ist h ein Homomorphismus, denn $h(a + b) = 2^{a+b} = 2^a * 2^b = h(a) * h(b)$ für alle $a, b \in \mathbb{N}$. Weiterhin ist $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ streng monoton steigend und somit injektiv.

Tutoraufgabe 5 (Reguläre Ausdrücke):

Sei $\Sigma = \{0, 1, \ldots, 9, -\}$ ein Alphabet, mit dem ganze Zahlen beschrieben werden können.

a) Geben Sie für die folgende Sprache über diesem Alphabet einen regulären Ausdruck an. Ganze Zahlen beginnen mit höchstens einem $-$, d.h. die Menge der ganzen Zahlen ist $\{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\}$.

Hinweis: Außer 0 beginnt keine ganze Zahl mit der Ziffer 0.

$L_1 = \{w \mid w \text{ ist eine positive ganze Zahl}\}$, d.h. $L_1 = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

b) Wir schränken uns nun auf das Alphabet $\Sigma' = \Sigma \setminus \{-\} = \{0, 1, \ldots, 9\}$ ein. Geben Sie für die folgende Sprache einen regulären Ausdruck an, der genau die Wörter über dem Alphabet Σ' beschreibt, die **nicht** in dieser Sprache liegen. Achten Sie darauf, dass $\Sigma' \setminus L$ auch Wörter wie 000 enthalten kann, die keine ganzen Zahlen sind.

$L_2 = \{w \mid w \text{ ist eine gerade natürliche Zahl}\}$, d.h. $L_2 = \{0, 2, 4, 6, \ldots\}$.

Lösung:

a)
- $r_1 = (1 + 2 + \ldots + 9)(0 + 1 + \ldots + 9)^*$

b)
- $r_2 = \varepsilon + 0(\Sigma')^+ + r_1^*(1 + 3 + 5 + 7 + 9)$
  Wie üblich steht Σ' in diesem regulären Ausdruck für die Disjunktion der einzelnen Symbole in der Menge, in diesem Falle also $0 + 1 + \ldots + 9$. Außerdem ist r^+ eine Abkürzung für rr^*.
  Der reguläre Ausdruck deckt drei verschiedene Fälle ab:
  - ε lässt das leere Wort zu, das keine ganze Zahl (und damit auch insbesondere nicht gerade) ist.
  - $0(\Sigma')^+$ erlaubt all die Wörter, die keine ganze Zahl sind, weil sie mit einer 0 beginnen und nicht die 0 sind.
  - $r_1^*(1 + 3 + 5 + 7 + 9)$ erlaubt all die Wörter, die mit einer ganzen Zahl beginnen und deren letzte Ziffer ungerade ist.
    Hier gibt es eine Überschneidung mit dem vorherigen Fall, denn r_1 erlaubt auch das Wort 0. Den Ausdruck r_1 können wir wiederverwenden, weil er das nicht mehr betrachtete Symbol $-$ nicht beinhaltet.

Hausaufgabe 6 (Reguläre Ausdrücke): (2 + 4 = 6 Punkte)

Seien Σ, Σ' die Alphabete aus Tutoraufgabe 5.

a) Geben Sie für die folgenden Sprachen über dem Alphabet Σ wie in Tutoraufgabe 5a) je einen regulären Ausdruck an.

- $L_3 = \{w \mid w$ ist eine nicht-positive ganze Zahl$\}$, d.h. $L_3 = \{0, -1, -2, -3, \ldots\}$.
- $L_4 = \{w \mid w$ ist eine durch 5 teilbare ganze Zahl$\}$, d.h. $L_4 = \{0, 5, -5, 10, -10, \ldots\}$.
  Hinweis: Für zwei ganze Zahlen $x, y \in \mathbb{Z}$ gilt, dass x durch y teilbar ist genau dann, wenn es ein $z \in \mathbb{Z}$ gibt, so dass $x = y * z$.

b) Geben Sie für die folgenden Sprachen wie in Tutoraufgabe 5b) jeweils einen regulären Ausdruck an, der genau die Wörter über dem Alphabet Σ' beschreibt, die **nicht** in dieser Sprache liegen.

- $L_5 = \{w \mid w$ enthält die Ziffer 7$\}$, d.h. $L_5 = \{7, 17, 27, \ldots, 70, \ldots\}$.
- $L_6 = \{w \mid w$ enthält die Ziffer 7 genau einmal$\}$, d.h. $L_6 = \{7, 17, 27, \ldots, 70, \ldots, 76, 78, 79, \ldots\}$.

Lösung:

a)
- $r_3 = 0 + -r_1$
- $r_4 = 0 + 5 + -5 + (\varepsilon + -)r_1(0 + 5)$

b)
- Wir definieren $\Sigma'_{\neq 7} := \Sigma' \setminus \{7\}$.
  Dann ist $r_5 = (\Sigma'_{\neq 7})^*$.
- $r_6 = r_5 + (\Sigma')^* 7 (\Sigma')^* 7 (\Sigma')^*$
  Hier werden wieder zwei Fälle unterschieden:
  - r_5 erlaubt all die Wörter, die die Ziffer 7 nicht beinhalten.
  - $(\Sigma')^* 7 (\Sigma')^* 7 (\Sigma')^*$ erlaubt die Wörter, die die Ziffer 7 mindestens zwei mal enthalten.

Hausaufgabe 7 (Reguläre Ausdrücke): (4 Punkte)

Sei $\Sigma = \{A, \ldots, Z, 0, \ldots, 9, \_, .\}$ ein Alphabet.
Wir definieren die folgenden regulären Ausdrücke

- $r := (A + B + \ldots + Z)$
- $s := (0 + 1 + \ldots + 9)$

Damit beschreibt der Ausdruck rs^* also alle Wörter, die aus genau einem Buchstaben und beliebig vielen darauf folgenden Ziffern bestehen.
Wir wollen nun "Wörter" der folgenden Form betrachten:

- $422365\_HAT\_1.7\_PUNKTE$
- $023426\_HAS\_4711\_POINTS$
- $652342\_BEKAM\_13.14\_POINTS$

Dies sind also die Wörter, in denen auf eine (6-stellige) Matrikelnummer ein Verb und dann eine Punktzahl folgt, die beliebige viele Stellen haben kann. Am Ende dieser Wörter steht immer "*PUNKTE*" oder "*POINTS*". Alle diese Teile sind jeweils durch ein "_" getrennt.
Als Punktzahl lassen wir ganze Zahlen wie in Tutoraufgabe 5 zu, erlauben zusätzlich aber auch, dass auf eine ganze Zahl ein "." und dann beliebig viele, aber mindestens eine Ziffer als Nachkommastellen folgen. Das heißt, dass wir .05 und 0.0.0 nicht als Punktzahl zulassen.
Wir wollen der Einfachheit halber die verwendeten Verben nicht näher spezifizieren und wollen daher jede (nicht-leere) Buchstabenfolge als Verb behandeln.
Geben Sie nun einen regulären Ausdruck an, der die Sprache dieser Wörter beschreibt.

Lösung:

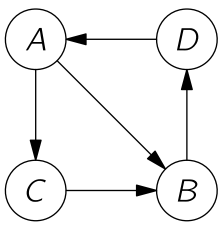
Wir definieren die folgenden regulären Ausdrücke:

$$\begin{aligned} r_{\text{Matrikelnummer}} &:= s^6 \\ r_{\text{Verb}} &:= r^+ \\ r_{\text{Zahl}} &:= (0 + (1 + 2 + 3 + \ldots + 9)s^*)(\varepsilon + .s^+) \end{aligned}$$

Hier beschreibt s^n den regulären Ausdruck $\underbrace{s \ldots s}_{n\text{-mal}}$.
Diese können wir nun zum Ausdruck $r_{\text{Matrikelnummer}}\_r_{\text{Verb}}\_r_{\text{Zahl}}\_(PUNKTE + POINTS)$ zusammensetzen.

Tutoraufgabe 8 (Reguläre Ausdrücke):

Gegeben sei folgender Graph:



Sei L die Sprache der Pfade gerade Länge, die von A nach A führen. Es gilt also beispielsweise $ACBDA \in L$, $ABDABDA \in L$ aber $ABDA \notin L$
Geben Sie einen regulären Ausdruck an, der diese Sprache beschreibt.

Lösung:

Wir erkennen, dass Pfade von A nach A immer aus den Teilpfaden $ABDA$ und $ACBDA$ zusammengesetzt sind. Ersterer hat ungerade Länge, daher muss immer eine gerade Anzahl solcher Stücke in einem Pfad gerader Länge enthalten sein. Wir erhalten den folgenden regulären Ausdruck:

$$r = A((BDA(CBDA)^*BDA) + (CBDA)^*)^*$$