Hinweise:

- Die **Hausaufgaben** sollen in Gruppen von je 2 Studierenden aus dem gleichen Tutorium bearbeitet werden.
- Die Lösungen der Hausaufgaben müssen bis Mi., 23.06.2010 im Tutorium abgegeben werden. Alternativ ist es bis 17 Uhr möglich, diese in den Kasten im Flur des LuFG I2 einzuwerfen (Ahornstr. 55, E1, 2. Etage).
- Namen und Matrikelnummern der Studierenden sowie **die Nummer der Übungsgruppe** sind auf jedes Blatt der Abgabe zu schreiben. **Heften bzw. tackern Sie die Blätter**!
- Die **Tutoraufgaben** werden in den jeweiligen Tutorien gemeinsam besprochen und bearbeitet.

Tutoraufgabe 1 (Die pre^*-Operation):

Sei $G = (N, T, P, S)$ eine CFG mit $N = \{S, C\}, T = \{a, b, c\}$ und P wie folgt.

$$\begin{array}{lcl} S & \to & aSb \mid cC \mid \epsilon \\ C & \to & cS \end{array}$$

Konstruieren Sie NFAs, welche für die folgenden Sprachen L_i jeweils die Sprache $pre^*_G(L_i)$ akzeptieren. Geben Sie außerdem an, ob $L_i \cap L(G) = \emptyset$ gilt.

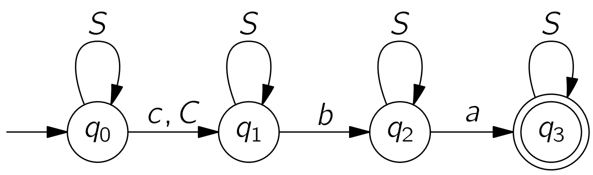
a) $L_1 = \{cba\}$

b) $L_2 = \{ccab\}$

c) $L_3 = L(a(cc)^*b)$

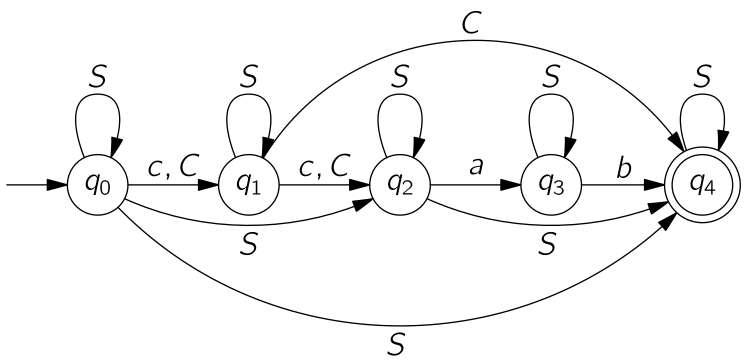
Lösung:

a)



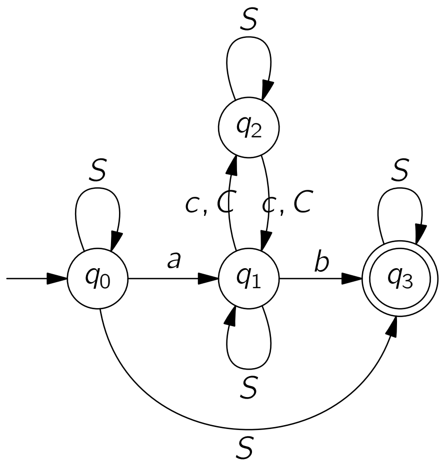
Da dieser Automat S nicht akzeptiert, gilt $L_1 \cap L(G) = \emptyset$.

b)



Da dieser Automat S akzeptiert, gilt $L_2 \cap L(G) \neq \emptyset$.

c)



Da dieser Automat S akzeptiert, gilt $L_3 \cap L(G) \neq \emptyset$.

Hausaufgabe 2 (Die *pre**-Operation): (1 + 3 + 3 = 7 Punkte)

Sei $G' = (N', T, P', S)$ eine CFG mit $N' = \{S\}, T = \{a, b, c\}$ und P' wie folgt.

$$S \rightarrow aSbSc \mid ScbS \mid aa$$

Konstruieren Sie NFAs, welche für die folgenden Sprachen L_i jeweils die Sprache $pre^*_{G'}(L_i)$ akzeptieren. Geben Sie außerdem an, ob $L_i \cap L(G') = \emptyset$ gilt.

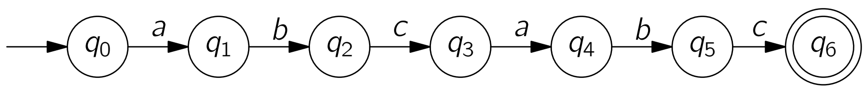
a) $L_4 = \{abcabc\}$

b) $L_5 = \{aaacbaabaac\}$

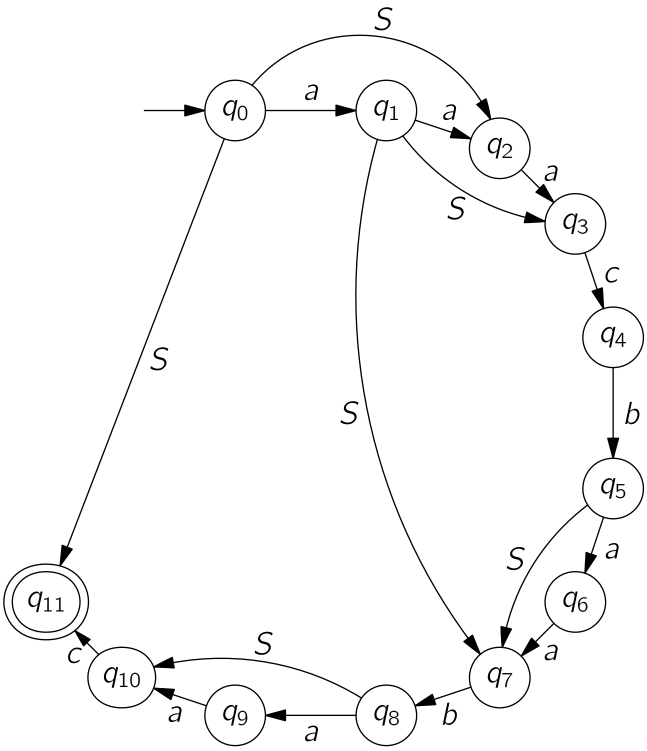
c) $L_6 = L(aa(cbaa)^*)$

Lösung:

a)

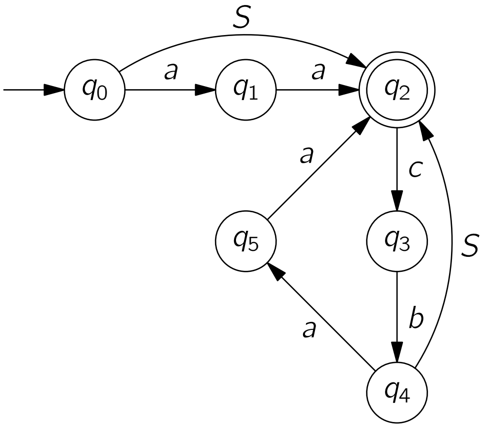


Da dieser Automat S nicht akzeptiert, gilt $L_4 \cap L(G) = \emptyset$.



b)

Da dieser Automat S akzeptiert, gilt $L_5 \cap L(G) \neq \emptyset$.



c)

Da dieser Automat S akzeptiert, gilt $L_6 \cap L(G) \neq \emptyset$.

Tutoraufgabe 3 (Äquivalenz kontextfreier Sprachen):

Sei $G_1 := (N_1, T, P_1, S_1)$ die linkslineare Grammatik aus Hausaufgabe 2 auf Übungsblatt 6 mit $N_1 := \{S_1, A, B\}$, $T := \{a, b\}$ und P_1 wie folgt:

$$S_1 \to aA \mid bB$$
$$A \to aA \mid \epsilon$$
$$B \to aB \mid bA$$

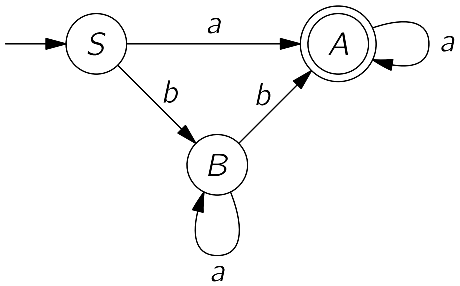
Betrachten Sie nun auch die linkslineare Grammatik $G_2 := (N_2, T, P_2, S_2)$ mit $N_2 := \{S_2, X, Y, Z\}$ und P_2 wie folgt:

$$\begin{aligned} S_2 &\to aX \mid bY \\ X &\to aZ \mid \epsilon \\ Y &\to aY \mid bZ \\ Z &\to aZ \mid \epsilon \end{aligned}$$

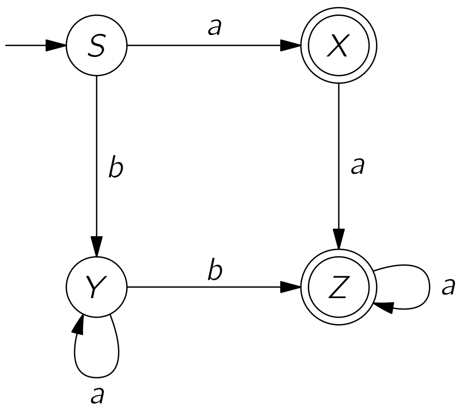
Beweisen oder widerlegen Sie $L(G_1) = L(G_2)$.

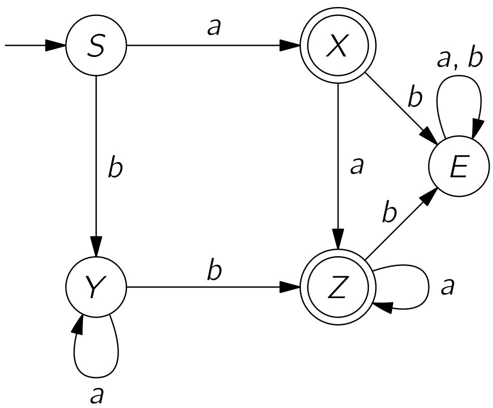
Lösung:

Nach der Konstruktion aus Aufgabe 2 auf Übungsblatt 6 können wir für G_1 den entsprechenden Automaten M_1 konstruieren:



Wir können die gleiche Konstruktion für G_2 durchführen und erhalten M_2. Hier ist M_2 links dargestellt, rechts steht M_2', eine determinisierte Variante von M_2:

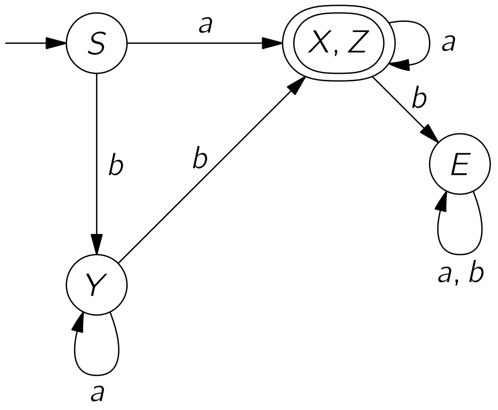




Wir minimieren nun den Automaten M_2' mit Hilfe des schnellen Markierungsalgorithmus:

X	$\times_0$		
Y	$\times_1$	$\times_0$	
Z	$\times_0$		$\times_0$
	S	X	Y

Wir sehen, dass Y und S mit Hilfe des Symbols a unterschieden werden können, wohingegen Z und X nicht unterscheidbar sind. Der minimale Automat $\tilde{M}_2$ zu M_2' ist also:



Offensichtlich gilt nun $L(G_1) = L(M_1) = L(\tilde{M}_2) = L(M_2') = L(M_2) = L(G_2)$.

Hausaufgabe 4 (Universalität kontextfreier Sprachen): (4 Punkte)

Sei G die folgende Grammatik. Ist $L(G)$ universell? Begründen Sie ihre Antwort.

$$\begin{aligned}
S &\to A \mid \epsilon \mid b \mid Ca \\
A &\to aSB \mid bB \\
B &\to bSB \mid aS \mid \epsilon \\
C &\to C \mid DD \\
D &\to C \mid CC
\end{aligned}$$

Lösung:

Die Grammatik ist universell. Es lassen sich folgende Worte ableiten:

$$\begin{aligned}
&S \Rightarrow \epsilon \\
&S \Rightarrow A \Rightarrow aSB \Rightarrow aB \Rightarrow a \\
&S \Rightarrow b \\
&S \Rightarrow A \Rightarrow aSB \Rightarrow aS \\
&S \Rightarrow A \Rightarrow bB \Rightarrow baS \\
&S \Rightarrow A \Rightarrow bB \Rightarrow bbSB \Rightarrow bbS
\end{aligned}$$

Somit läßt sich jedes beliebige Wort aus $\{a, b\}^*$ ableiten.

Tutoraufgabe 5 (Produktivität von Nichtterminalen):

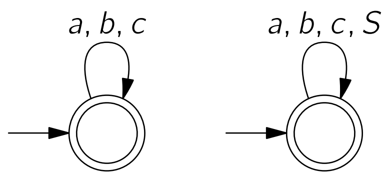
Sei $G := (N, \{a, b, c\}, P, S)$ eine kontextfreie Grammatik mit $N := \{S, A, B, C\}$ und P wie folgt:

$$\begin{aligned}
S &\to aSb \mid bSa \mid C \mid SS \mid a \mid b \\
C &\to cC
\end{aligned}$$

Ermitteln sie die Menge $\{A \in N \mid \text{es gibt kein } w \in T^* \text{ mit } A \Rightarrow^* w\}$ der unproduktiven Nichtterminalsymbole mit Hilfe des in der Vorlesung vorgestellten Verfahrens. Geben Sie als Zwischenergebnisse die Automaten an, die bei der Berechnung von pre^* durch Sättigungsschritte entstehen. Geben Sie außerdem eine Grammatik G' an, in der die unproduktiven Nichtterminale entfernt wurden.

Lösung:

Nach Vorlesung reicht es, $N \cap pre^*(T^*)$ zu bestimmen. Im Folgenden ist links ein NFA dargestellt, der T^* erkennt, die weiteren Automaten werden durch Sättigungsschritte erzeugt:



Der rechts stehende Automat erkennt die Sprache $pre^*(T^*) = \{a, b, c, S\}^*$. Damit sind die produktiven Nichtterminalsymbole $\{a, b, c, S\} \cap \{S, C\} = \{S\}$. Die auf produktive Nichtterminale eingeschränkte Grammatik ist $G' := (\{S\}, \{a, b, c\}, P', S)$ mit P' wie folgt:

$$S \to aSb \mid bSa \mid SS \mid a \mid b$$

Hausaufgabe 6 (Nullierbarkeit von Nichtterminalen): (3 Punkte)

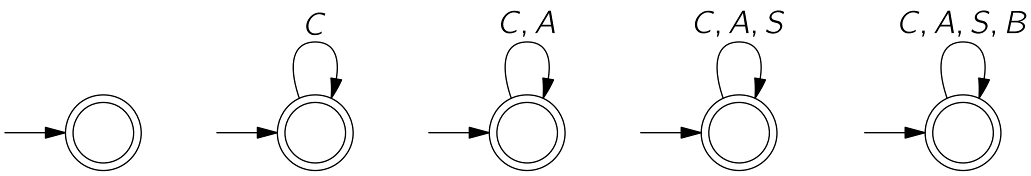
Sei $G := (N, \{a, b, c\}, P, S)$ eine kontextfreie Grammatik mit $N := \{S, A, B, C\}$ und P wie folgt:

$$\begin{aligned} S &\to A \mid B \\ A &\to aAb \mid aBb \mid AA \mid C \\ B &\to bAa \mid bBa \mid BB \mid C \\ C &\to CC \mid c \mid \epsilon \end{aligned}$$

Ermitteln sie die Menge $\{A \in N \mid A \Rightarrow^* \epsilon\}$ der nullierbaren Nichtterminalsymbole mit Hilfe des in der Vorlesung vorgestellten Verfahrens. Geben Sie als Zwischenergebnisse die Automaten an, die bei der Berechnung von pre^* durch Sättigungsschritte entstehen.

Lösung:

Nach Vorlesung reicht es, $N \cap pre^*(\{\epsilon\})$ zu bestimmen. Im Folgenden ist links ein NFA dargestellt, der $\{\epsilon\}$ erkennt, die weiteren Automaten werden durch Sättigungsschritte erzeugt:



Der rechts stehende Automat erkennt die Sprache $pre^*(\{\epsilon\}) = \{S, A, B, C\}^*$. Damit gilt $pre^*(\{\epsilon\}) \cap N = \{S, A, B, C\}$.

Tutoraufgabe 7 (Anwendung von pre^*):

Sei $G = (N, T, P, S)$ eine CFG. Geben Sie ein Verfahren an, das für ein $A \in N$ und ein $a \in T$ entscheidet, ob $A \Rightarrow_G^* T^*a$ gilt.

Lösung:

Falls $A \in pre(T^*a)$, so kann A zu einem Wort abgeleitet werden, dass auf a endet.

Hausaufgabe 8 (Anwendung von pre^*): (3 Punkte)

Sei $G = (N, T, P, S)$ eine CFG. Wir sagen $A \in N$ ist ein n-Produktionssymbol gdw. ein Wort $w \in T^*$ mit $|w| = n$ existiert, so dass $A \Rightarrow^+ w$.
Geben Sie ein Verfahren an, das entscheidet ob ein Nichtterminal ein n-Produktionssymbol ist.

Lösung:

Es gilt A ist ein n-Produktionssymbol gdw. $A \in pre(T^n)$.

Tutoraufgabe 9 (Präfixsprachenproblem):

Seien G_1, G_2 zwei kontextfreie Grammatiken über den Terminalsymbolen T. Wir nennen $L(G_1)$ Präfixsprache von $L(G_2)$ wenn für alle $w \in L(G_1)$ und beliebige Wörter $v \in T^*$ das Wort $w \cdot v$ in $L(G_2)$ enthalten ist.
Beweisen Sie, dass die Frage „Ist $L(G_1)$ Präfixsprache von $L(G_2)$?" unentscheidbar ist.

Lösung:

Angenommen, das Präfixsprachenproblem wäre entscheidbar. Man kann G_1 so konstruieren, dass $L(G_1) = \{\epsilon\}$ gilt. Dann ist das Präfixsprachenproblem für $L(G_1)$ und $L(G_2)$ äquivalent zu der Frage, ob für alle Wörter $v \in T^*$ gilt, dass $\epsilon \cdot v = v \in L(G_2)$ ist. Dies ist aber das Universalitätsproblem $L(G_2) = T^*$, das nach Vorlesung nicht entscheidbar ist.

Hausaufgabe 10 (Komplementärsprachenproblem): (4 Punkte)

Seien G_1, G_2 zwei kontextfreie Grammatiken über den Terminalsymbolen T. Beweisen Sie, dass das Entscheidungsproblem $L(G_1) = T^* \setminus L(G_2)$ unentscheidbar ist.

Lösung:

Angenommen, das Komplementärsprachen wäre entscheidbar. Man kann G_2 so konstruieren, dass $L(G_2) = \emptyset$ gilt. Dann ist das Komplementärsprachen für $L(G_1)$ und $L(G_2)$ äquivalent zu der Frage, ob $L(G_1) = T^* \setminus \emptyset = T^*$. Dies ist aber das Universalitätsproblem $L(G_1) = T^*$, das nach Vorlesung nicht entscheidbar ist.

Tutoraufgabe 11 (Epsilon-Schnittproblem):

Das ϵ-Schnittproblem für zwei CFGs G_1 und G_2 ist die Frage, ob $L(G_1) \cap L(G_2) = \{\epsilon\}$ gilt.

Beweisen Sie, dass das ϵ-Schnittproblem nicht entscheidbar ist.

Hinweis: Zeigen Sie, wie man mit einem Entscheidungsverfahren für dieses Problem das Post'sche Korrespondenzproblem entscheiden kann.

Lösung:

Sei $I := \left\{ \boxed{\begin{matrix} u_1 \\ \\ v_1 \end{matrix}}, \boxed{\begin{matrix} u_2 \\ \\ v_2 \end{matrix}}, \ldots, \boxed{\begin{matrix} u_n \\ \\ v_n \end{matrix}} \right\}$ eine beliebige PCP-Instanz.

Konstruiere zwei Grammatiken G_1 und G_2:

$$
\begin{array}{lll}
G_1 : & & \\
S & \rightarrow & u_1 D v_1^R \mid u_2 D v_2^R \mid \ldots \mid u_n D v_n^R \mid \epsilon \\
D & \rightarrow & u_1 D v_1^R \mid u_2 D v_2^R \mid \ldots \mid u_n D v_n^R \mid \$
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
G_2 : & & \\
S & \rightarrow & 0S0 \mid 1S1 \mid \$ \mid \epsilon
\end{array}
$$

Nun gilt $L(G_1) \cap L(G_2) = \{\epsilon\}$ gdw. I nicht lösbar ist. Aufgrund der Unentscheidbarkeit des Post'schen Korrespondenzproblems ist damit das ϵ-Schnittproblem nicht entscheidbar.

Hausaufgabe 12 (Palindromproblem): (6 Punkte)

Das Palindromproblem für eine CFG G ist die Frage, ob ein $w \in T^*$ existiert mit $ww^R \in L(G)$.

Beweisen Sie, dass das Palindromproblem nicht entscheidbar ist.

Hinweis: Zeigen Sie, wie man mit einem Entscheidungsverfahren für dieses Problem das Post'sche Korrespondenzproblem entscheiden kann.

Lösung:

Sei $I := \left\{ \boxed{\begin{array}{c} u_1 \\ \\ v_1 \end{array}}, \boxed{\begin{array}{c} u_2 \\ \\ v_2 \end{array}}, \ldots, \boxed{\begin{array}{c} u_n \\ \\ v_n \end{array}} \right\}$ eine beliebige PCP-Instanz.

Konstruiere eine Grammatik G wie folgt:

$$\begin{array}{lcl} S & \to & u_1 E v_1^R \mid u_2 E v_2^R \mid \ldots \mid u_n E v_n^R \\ E & \to & S \mid \$\$ \end{array}$$

Es existiert ein $w \in T^*$ mit $ww^R \in L(G)$ gdw. I lösbar ist. Aufgrund der Unentscheidbarkeit des Post'schen Korrespondenzproblems ist damit das Palindromproblem nicht entscheidbar.