Prof. Dr. J. Giesl

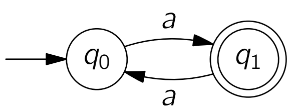
M. Brockschmidt, F. Emmes, C. Fuhs, C. Otto, T. Ströder

Hinweise:

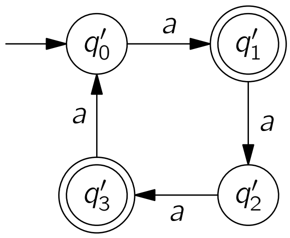
- Die **Hausaufgaben** sollen in Gruppen von je 2 Studierenden aus dem gleichen Tutorium bearbeitet werden.
- Die Lösungen der Hausaufgaben müssen bis Mi., 19.05.2010 im Tutorium abgegeben werden. Alternativ ist es bis 17 Uhr möglich, diese in den Kasten im Flur des LuFG I2 einzuwerfen (Ahornstr. 55, E1, 2. Etage).
- Namen und Matrikelnummern der Studierenden sowie **die Nummer der Übungsgruppe** sind auf jedes Blatt der Abgabe zu schreiben. **Heften bzw. tackern Sie die Blätter**!
- Die **Tutoraufgaben** werden in den jeweiligen Tutorien gemeinsam besprochen und bearbeitet.

Tutoraufgabe 1 (Homomorphismen auf DFAs):

Betrachten Sie die beiden folgenden DFAs M und M'.



M



M'

a) Gibt es einen Homomorphismus von M nach M'? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Gibt es einen Homomorphismus von M' nach M? Begründen Sie Ihre Antwort.

Hausaufgabe 2 (Homomorphismen auf DFAs): (4 + 3 = 7 Punkte)

Sei Σ ein Alphabet.

a) Beweisen Sie die folgende Aussage:

Seien $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, $M' = (Q', \Sigma, \delta', q'_0, F')$ zwei beliebige DFAs und sei $h : Q \to Q'$ ein Homomorphismus von M nach M'. Dann gilt $L(M) = L(M')$.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass für alle $w \in \Sigma^*$ gilt: $h(\hat{\delta}(q_0, w)) = \hat{\delta}'(h(q_0), w)$. Verwenden Sie hierzu Induktion über die Länge des Wortes w.

b) Geben Sie zwei DFAs M und M' über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ an, die alle folgenden Eigenschaften erfüllen:

- $L(M) = L(M')$
- Es existiert kein Homomorphismus h von M nach M'
- Es existiert kein Homomorphismus h' von M' nach M
- M und M' haben jeweils maximal 4 Zustände

Tutoraufgabe 3 (Myhill-Nerode-Relation):

Bestimmen Sie für die folgenden Sprachen L_i über den Alphabeten Σ_i die Menge der Äquivalenzklassen $\Sigma^*/\equiv_{L_i}$. Geben Sie für die Sprachen L_i, für die diese Menge endlich ist, einen minimalen DFA an, der L_i erkennt. Geben Sie für die **anderen** Sprachen für alle Paare $[w]_{\equiv_{L_i}} \neq [w']_{\equiv_{L_i}}$ ein trennendes Wort u an, so dass $wu \in L_i$ und $w'u \notin L_i$ gilt.

a) Seien $\Sigma_1 := \{a, b\}^*$ und $L_1 := \{w \in \Sigma_1 \mid w \text{ enthält } ab \text{ oder } aa\}$

b) Sei $\Sigma_2 := \{0, 1\}^*$.
Wir führen die "Gewichtsfunktion" $weight : \{0, 1\}^* \to \mathbb{N}_0$ ein, die die Quersumme einer Binärzahl berechnet:

$$\begin{aligned} weight(\epsilon) &:= 0 \\ weight(w \cdot a) &:= weight(w) + a \qquad\qquad a \in \{0,1\}, w \in \{0,1\}^* \end{aligned}$$

$L_2 := \{w \in \Sigma_2^* \mid \exists k \in \mathbb{N}_0 : weight(w) = 2^k\}$

c) Seien $\Sigma_3 := \{0, 1\}^*$ und $L_3 := \{w \in \Sigma_3^* \mid \exists n \in \mathbb{N}_0 : w = 1^n01^n\}$

Hausaufgabe 4 (Myhill-Nerode-Relation): (2 + 3 + 2 = 7 Punkte)

Bestimmen Sie für die folgenden Sprachen L_i über den Alphabeten Σ_i die Menge der Äquivalenzklassen $\Sigma^*/\equiv_{L_i}$. Geben Sie für die Sprachen L_i, für die diese Menge endlich ist, einen minimalen DFA an, der L_i erkennt. Geben Sie für die **anderen** Sprachen für alle Paare $[w]_{\equiv_{L_i}} \neq [w']_{\equiv_{L_i}}$ ein trennendes Wort u an, so dass $wu \in L_i$ und $w'u \notin L_i$ gilt.

a) Seien $\Sigma_4 := \{a, b\}$ und $L_4 := \{w \in \Sigma_4^* \mid w \text{ enthält } aba \text{ oder } abba\}$

b) Seien $\Sigma_5 := \{0, 1, \ldots, 9\}$ und $L_5 := \{w \in \Sigma_5^* \mid w \text{ durch 3 teilbare Dezimalzahl }\} = \{0, 3, 6, 9, 12, \ldots\}$
Dabei sind Dezimalzahlen all die Ziffernfolgen, die entweder die 0 sind oder nicht mit 0 beginnen.

Hinweis: Um herauszufinden, ob eine Dezimalzahl z durch 3 teilbar ist, kann man die Quersumme q der Zahl bilden und stattdessen überprüfen, ob q durch 3 teilbar ist. Genau dann, wenn dies der Fall ist, ist auch z durch 3 teilbar.

c) Sei $\Sigma_6 := \{0, 1\}$.
Wir erinnern an $dup : \Sigma^* \to \Sigma^*$ aus Tutoraufgabe 1 von Übungsblatt 3:

$$\begin{aligned} dup(\epsilon) &:= \epsilon \\ dup(w \cdot a) &:= dup(w) \cdot a \cdot a \qquad\qquad a \in \Sigma, w \in \Sigma^* \end{aligned}$$

$L_6 := \{w \in \Sigma_6^* \mid \exists w' \in \{1\}^* : w = w' \cdot 0 \cdot dup(w')\}$

Tutoraufgabe 5 (Sprach-Index):

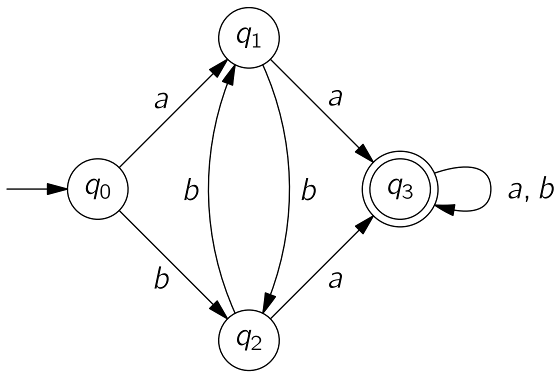
Kann es einen NFA $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ geben, bei dem $|Q|$ kleiner ist als der Index von $\equiv_{L(M)}$?

Hausaufgabe 6 (Größenabschätzung für Automaten): (3 Punkte)

Sei $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein NFA mit $|Q| = 16$ Zuständen. Kann ein Automat $M' = (Q', \Sigma, \delta', q_0', F')$ existieren, der ein minimaler DFA mit $|Q'| = 76543$ und $L(M) = L(M')$ ist? Begründen Sie Ihre Antwort.

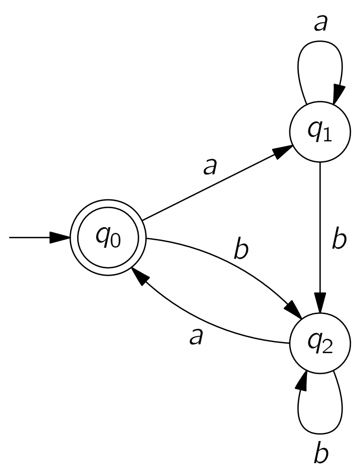
Tutoraufgabe 7 (Vergleich $\sim$ und $\equiv_L$):

Der folgende Automat erkennt die Sprache L. Geben Sie zwei Wörter $u, v \in \{a, b\}^*$ an, für die $u \equiv_L v$ und $u \not\sim v$ gilt. Hierbei bedeutet $u \sim v \Leftrightarrow \hat{\delta}(q_0, u) = \hat{\delta}(q_0, v)$. Geben Sie ausserdem $[u]_\sim$, $[v]_\sim$, $[u]_{\equiv_L}$ und $[v]_{\equiv_L}$ in Form von regulären Ausdrücken an.



Hausaufgabe 8 (Minimalität): (3 Punkte)

Beweisen Sie, dass folgender DFA minimal ist. Verwenden Sie hierzu den Satz von Myhill-Nerode.



Tutoraufgabe 9 (Myhill-Nerode-DFA und Äquivalenzklassen):

Sei $[\epsilon]_{\equiv_L} \cap L = \emptyset$. Zeigen Sie, dass der Startzustand im Myhill-Nerode-DFA zu L kein Endzustand ist ($q_0 \notin F$).

Hausaufgabe 10 (Abschätzung von $\equiv_L$): (4 Punkte)

Sei L eine reguläre Sprache. Für diese Sprache ist $[\epsilon]_{\equiv_L} \cap L = \emptyset$ bekannt (also kein Wort aus dieser Äquivalenzklasse ist in der Sprache L enthalten). Weiterhin gilt $[\epsilon]_{\equiv_L} = [a]_{\equiv_L}$. Zudem ist $[ab]_{\equiv_L} \subseteq L$ bekannt (also alle Wörter in dieser Äquivalenzklasse sind auch in der Sprache L enthalten). Welche der folgenden Aussagen sind korrekt? Begründen Sie Ihre Antworten.
Hinweis: Versuchen Sie, den Myhill-Nerode-DFA für L so weit wie möglich zu konstruieren!

1. $L = \emptyset$

2. $[aaaa]_{\equiv_L} \cap L = \emptyset$
3. $[aaaa]_{\equiv_L} \subseteq L$
4. $b \equiv_L ab$