Prof. Dr. J. Giesl M. Brockschmidt, F. Emmes, C. Fuhs, C. Otto, T. Ströder

Hinweise:

- Die **Hausaufgaben** sollen in Gruppen von je 2 Studierenden aus dem gleichen Tutorium bearbeitet werden.
- Die Lösungen der Hausaufgaben müssen bis Mi., 16.06.2010 im Tutorium abgegeben werden. Alternativ ist es bis 17 Uhr möglich, diese in den Kasten im Flur des LuFG I2 einzuwerfen (Ahornstr. 55, E1, 2. Etage).
- Namen und Matrikelnummern der Studierenden sowie **die Nummer der Übungsgruppe** sind auf jedes Blatt der Abgabe zu schreiben. **Heften bzw. tackern Sie die Blätter**!
- Da am Mi., 9.6.2010 der Studieninformationstag stattfindet, fallen die Tutorien an diesem Tag aus.
- Die **Tutoraufgaben** werden in der kommenden Globalübung am 11.06.2010 vorgerechnet.
- Die **Einsicht** in die Präsenzübungs-Ergebnisse wird am **11.06.2010 zwischen 8:00 und 10:00 in 2356|056** (Ahornstraße 55, Raum 5056) stattfinden. Studenten mit einer Matrikelnummer kleiner als 294000 werden gebeten, zwischen 8:00 und 9:00 zu kommen, alle anderen zwischen 9:00 und 10:00.
- Die **Rückgabe** der korrigierten Präsenzübungen erfolgt in der Einsicht und in den Tutorien am 16.6.2010. Nach der Rückgabe sind **keine Eingaben zur Korrektur möglich**!

Hausaufgabe 1 (Eindeutigkeit): (1 + 2 + 2 = 5 Punkte)

Sei $G = (N, T, P, S)$ eine Grammatik mit $N = \{S, A, B\}, T = \{a, b\}$ und P wie folgt:

$$\begin{aligned} S &\to AB \mid SAB \\ A &\to Aa \mid \epsilon \\ B &\to Bb \mid \epsilon \end{aligned}$$

a) Geben Sie die von G erzeugte Sprache $L(G)$ an (ohne Beweis).

b) Beweisen Sie, dass G nicht eindeutig ist.

c) Geben Sie eine eindeutige kontextfreie Grammatik G' an mit $L(G') = L(G)$ (ohne Beweis).

Hausaufgabe 2 (Grammatiken und reguläre Sprachen): (2 + 4 + 2 = 8 Punkte)

Sei $G = (N, T, P, S)$ eine Grammatik. Wenn für G gilt, dass

$$\forall (A \to \alpha) \in P : (A \in N) \wedge (\alpha \in \{\epsilon\} \cup T \cup T \cdot N)$$

dann nennt man G **linkslineare** Grammatik. In einer solchen Grammatik sind also alle Produktionen so gestaltet, dass sie entweder ein Nonterminalsymbol löschen, es in ein Terminalsymbol oder in ein Terminalsymbol und ein weiteres Nonterminalsymbol umwandeln.

a) Betrachten Sie die linkslineare Grammatik $G := (N, T, P, S)$ mit $N := \{S, A, B\}$, $T := \{a, b\}$ und P wie folgt:

$$\begin{aligned} S &\to aA \mid bB \\ A &\to aA \mid \epsilon \\ B &\to aB \mid bA \end{aligned}$$

Geben Sie Ableitungsbäume für die Worte $w_1 = aa$ und $w_2 = baaba$ an.

b) Nehmen Sie an, dass $G = (N, T, P, S)$ eine beliebige linkslineare Grammatik ist. Zur Vereinfachung fordern wir zusätzlich, dass P keine Regeln der Form $A \to b$ enthält, sondern alle Regeln die Form $A \to \varepsilon$ oder $A \to bC$ für beliebige $A, C \in N$, $b \in T$ haben. [1]

Definieren Sie nun einen NFA M_G, für den $L(M_G) = L(G)$ gilt. Sie brauchen diese Gleichheit nicht zu beweisen.

Hinweis: Sie sollten als Zustände für M_G die Nonterminalsymbole N wählen.

c) Sei $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein NFA. Geben Sie eine linkslineare Grammatik G_M an, so dass $L(G_M) = L(M)$. Sie brauchen diese Gleichheit nicht zu beweisen.

Tutoraufgabe 3 (Kontextfreie Grammatiken):

Die Dyck-Sprache ist die Sprache aller korrekt geklammerten Ausdrücke. Z.B. sind "()", "(()())" und "()(())" korrekt geklammerte Ausdrücke, während ")(" und "(()" keine korrekt geklammerten Ausdrücke sind. Zur Vereinfachung der Lesbarkeit folgender Definitionen verwenden wir die Zeichen a und b anstelle von (und). Formal ist die Dyck-Sprache über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ dann folgendermaßen definiert:
$D = \{w \in \Sigma^* \mid \sharp_a(w) = \sharp_b(w) \land \forall u, v \in \Sigma^* : u \cdot v = w \Rightarrow \sharp_a(u) \geq \sharp_b(u)\}$, wobei die Funktionen $\sharp_a$ und $\sharp_b$ die Anzahl der vorkommenden Zeichen a bzw. b in einem Wort zählen. Formal:
$\sharp_a : \Sigma^* \to \mathbb{N}_0$ mit $\sharp_a(\epsilon) = 0$, $\sharp_a(w \cdot a) = \sharp_a(w) + 1$ und $\sharp_a(w \cdot b) = \sharp_a(w)$. Die Funktion $\sharp_b$ ist analog definiert.
Geben Sie eine kontextfreie Grammatik an, die D erzeugt (Sie brauchen nicht zu beweisen, dass diese Grammatik D erzeugt).

Hausaufgabe 4 (Kontextfreie Grammatiken): (2 + 2 + 3 = 7 Punkte)

Geben Sie jeweils eine kontextfreie Grammatik an, welche die folgenden Sprachen erzeugt (Sie brauchen nicht zu beweisen, dass Ihre Grammatiken die geforderten Sprachen erzeugen).

a) $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$

b) $\{ab^n c \mid n > 0\}$

c) $\{w \in \{a, b, c\}^* \mid \sharp_a(w) = \sharp_b(w)\}$

Hausaufgabe 5 (Induktion): (6 Punkte)

Betrachten Sie folgende kontextfreie Grammatik $G = (N, T, P, S)$ mit $N = \{S\}$, $T = \{a, b\}$ und $P = \{$

$$\begin{array}{lcl} S & \to & abS, \\ S & \to & \epsilon \end{array}$$

$\}$
und die Sprache $L = \{(ab)^n \mid n \geq 0\}$.

Beweisen Sie, dass $L(G) = L$ gilt.

Hinweis: Zeigen Sie die Inklusionen $L(G) \subseteq L$ und $L \subseteq L(G)$ separat. Verwenden Sie für die erste Inklusion eine Induktion über die Ableitungslänge der von G erzeugten Wörter und für die zweite Inklusion eine Induktion über die Anzahl von ab Teilworten in $w \in L$.

[1] Dies ist keine wesentliche Einschränkung, denn mit Hilfe eines zusätzlichen Nonterminalsymbols E mit der Produktion $E \to \epsilon$ können Regeln der Form $A \to b$ in $A \to bE$ umgewandelt werden. Damit kann die selbe Sprache wie mit Hilfe der ursprünglichen Grammatik erkannt werden.