

Hinweise:

- Die **Hausaufgaben** sollen in Gruppen von je 2 Studierenden aus dem gleichen Tutorium bearbeitet werden.
- Die Lösungen der Hausaufgaben müssen bis Mi., 23.06.2010 im Tutorium abgegeben werden. Alternativ ist es bis 17 Uhr möglich, diese in den Kasten im Flur des LuFG I2 einzuwerfen (Ahornstr. 55, E1, 2. Etage).
- Namen und Matrikelnummern der Studierenden sowie **die Nummer der Übungsgruppe** sind auf jedes Blatt der Abgabe zu schreiben. **Heften bzw. tackern Sie die Blätter!**
- Die **Tutoraufgaben** werden in den jeweiligen Tutorien gemeinsam besprochen und bearbeitet.

Tutoraufgabe 1 (Die pre^* -Operation):

Sei $G = (N, T, P, S)$ eine CFG mit $N = \{S, C\}$, $T = \{a, b, c\}$ und P wie folgt.

$$S \rightarrow aSb \mid cC \mid \epsilon$$

$$C \rightarrow cS$$

Konstruieren Sie NFAs, welche für die folgenden Sprachen L_i jeweils die Sprache $pre_G^*(L_i)$ akzeptieren. Geben Sie außerdem an, ob $L_i \cap L(G) = \emptyset$ gilt.

- $L_1 = \{cba\}$
- $L_2 = \{ccab\}$
- $L_3 = L(a(cc)^*b)$

Hausaufgabe 2 (Die pre^* -Operation):
(1 + 3 + 3 = 7 Punkte)

Sei $G' = (N', T, P', S)$ eine CFG mit $N' = \{S\}$, $T = \{a, b, c\}$ und P' wie folgt.

$$S \rightarrow aSbSc \mid ScbS \mid aa$$

Konstruieren Sie NFAs, welche für die folgenden Sprachen L_i jeweils die Sprache $pre_{G'}^*(L_i)$ akzeptieren. Geben Sie außerdem an, ob $L_i \cap L(G') = \emptyset$ gilt.

- $L_4 = \{abcabc\}$
- $L_5 = \{aaacbaabaac\}$
- $L_6 = L(aa(cbaa)^*)$

Tutoraufgabe 3 (Äquivalenz kontextfreier Sprachen):

Sei $G_1 := (N_1, T, P_1, S_1)$ die linkslineare Grammatik aus Hausaufgabe 2 auf Übungsblatt 6 mit $N_1 := \{S_1, A, B\}$, $T := \{a, b\}$ und P_1 wie folgt:

$$S_1 \rightarrow aA \mid bB$$

$$A \rightarrow aA \mid \epsilon$$

$$B \rightarrow aB \mid bA$$

Betrachten Sie nun auch die linkslineare Grammatik $G_2 := (N_2, T, P_2, S_2)$ mit $N_2 := \{S_2, X, Y, Z\}$ und P_2 wie folgt:

$$S_2 \rightarrow aX \mid bY$$

$$X \rightarrow aZ \mid \epsilon$$

$$Y \rightarrow aY \mid bZ$$

$$Z \rightarrow aZ \mid \epsilon$$

Beweisen oder widerlegen Sie $L(G_1) = L(G_2)$.

Hausaufgabe 4 (Universalität kontextfreier Sprachen):
(4 Punkte)

Sei G die folgende Grammatik. Ist $L(G)$ universell? Begründen Sie ihre Antwort.

$$S \rightarrow A \mid \epsilon \mid b \mid Ca$$

$$A \rightarrow aSB \mid bB$$

$$B \rightarrow bSB \mid aS \mid \epsilon$$

$$C \rightarrow C \mid DD$$

$$D \rightarrow C \mid CC$$

Tutoraufgabe 5 (Produktivität von Nichtterminalen):

Sei $G := (N, \{a, b, c\}, P, S)$ eine kontextfreie Grammatik mit $N := \{S, A, B, C\}$ und P wie folgt:

$$S \rightarrow aSb \mid bSa \mid C \mid SS \mid a \mid b$$

$$C \rightarrow cC$$

Ermitteln sie die Menge $\{A \in N \mid \text{es gibt kein } w \in T^* \text{ mit } A \Rightarrow^* w\}$ der unproduktiven Nichtterminalsymbole mit Hilfe des in der Vorlesung vorgestellten Verfahrens. Geben Sie als Zwischenergebnisse die Automaten an, die bei der Berechnung von pre^* durch Sättigungsschritte entstehen. Geben Sie außerdem eine Grammatik G' an, in der die unproduktiven Nichtterminale entfernt wurden.

Hausaufgabe 6 (Nullierbarkeit von Nichtterminalen):
(3 Punkte)

Sei $G := (N, \{a, b, c\}, P, S)$ eine kontextfreie Grammatik mit $N := \{S, A, B, C\}$ und P wie folgt:

$$S \rightarrow A \mid B$$

$$A \rightarrow aAb \mid aBb \mid AA \mid C$$

$$B \rightarrow bAa \mid bBa \mid BB \mid C$$

$$C \rightarrow CC \mid c \mid \epsilon$$

Ermitteln sie die Menge $\{A \in N \mid A \Rightarrow^* \epsilon\}$ der nullierbaren Nichtterminalsymbole mit Hilfe des in der Vorlesung vorgestellten Verfahrens. Geben Sie als Zwischenergebnisse die Automaten an, die bei der Berechnung von pre^* durch Sättigungsschritte entstehen.

Tutoraufgabe 7 (Anwendung von pre^*):

Sei $G = (N, T, P, S)$ eine CFG. Geben Sie ein Verfahren an, das für ein $A \in N$ und ein $a \in T$ entscheidet, ob $A \Rightarrow_G^* T^* a$ gilt.

Hausaufgabe 8 (Anwendung von pre^*):

(3 Punkte)

Sei $G = (N, T, P, S)$ eine CFG. Wir sagen $A \in N$ ist ein n -Produktionssymbol gdw. ein Wort $w \in T^*$ mit $|w| = n$ existiert, so dass $A \Rightarrow^+ w$.

Geben Sie ein Verfahren an, das entscheidet ob ein Nichtterminal ein n -Produktionssymbol ist.

Tutoraufgabe 9 (Präfixsprachenproblem):

Seien G_1, G_2 zwei kontextfreie Grammatiken über den Terminalsymbolen T . Wir nennen $L(G_1)$ Präfixsprache von $L(G_2)$ wenn für alle $w \in L(G_1)$ und beliebige Wörter $v \in T^*$ das Wort $w \cdot v$ in $L(G_2)$ enthalten ist.

Beweisen Sie, dass die Frage „Ist $L(G_1)$ Präfixsprache von $L(G_2)$?“ unentscheidbar ist.

Hausaufgabe 10 (Komplementärsprachenproblem):

(4 Punkte)

Seien G_1, G_2 zwei kontextfreie Grammatiken über den Terminalsymbolen T . Beweisen Sie, dass das Entscheidungsproblem $L(G_1) = T^* \setminus L(G_2)$ unentscheidbar ist.

Tutoraufgabe 11 (Epsilon-Schnittproblem):

Das ϵ -Schnittproblem für zwei CFGs G_1 und G_2 ist die Frage, ob $L(G_1) \cap L(G_2) = \{\epsilon\}$ gilt.

Beweisen Sie, dass das ϵ -Schnittproblem nicht entscheidbar ist.

Hinweis: Zeigen Sie, wie man mit einem Entscheidungsverfahren für dieses Problem das Post'sche Korrespondenzproblem entscheiden kann.

Hausaufgabe 12 (Palindromproblem):

(6 Punkte)

Das Palindromproblem für eine CFG G ist die Frage, ob ein $w \in T^*$ existiert mit $ww^R \in L(G)$.

Beweisen Sie, dass das Palindromproblem nicht entscheidbar ist.

Hinweis: Zeigen Sie, wie man mit einem Entscheidungsverfahren für dieses Problem das Post'sche Korrespondenzproblem entscheiden kann.