Prof. Dr. J. Giesl
M. Brockschmidt, F. Emmes, C. Fuhs, C. Otto, T. Ströder

Hinweise:

- Die **Hausaufgaben** sollen in Gruppen von je 2 Studierenden aus dem gleichen Tutorium bearbeitet werden.
- Die Lösungen der Hausaufgaben müssen bis Mi., 30.06.2010 im Tutorium abgegeben werden. Alternativ ist es bis 17 Uhr möglich, diese in den Kasten im Flur des LuFG I2 einzuwerfen (Ahornstr. 55, E1, 2. Etage).
- Namen und Matrikelnummern der Studierenden sowie **die Nummer der Übungsgruppe** sind auf jedes Blatt der Abgabe zu schreiben. **Heften bzw. tackern Sie die Blätter**!
- Die **Tutoraufgaben** werden in den jeweiligen Tutorien gemeinsam besprochen und bearbeitet.

Tutoraufgabe 1 (ϵ-Produktionen):

Überführen Sie die folgende Grammatik mit dem in der Vorlesung vorgestellten Verfahren in eine äquivalente Grammatik ohne ϵ-Produktionen.

$$
\begin{array}{lcl}
S & \to & HB \\
H & \to & xTLy \\
T & \to & t \mid \epsilon \\
L & \to & LL \mid \ell \mid \epsilon \\
B & \to & iCj \mid \epsilon \\
C & \to & CC \mid D \mid P \\
D & \to & DD \mid P \mid \epsilon \\
P & \to & p \mid \epsilon
\end{array}
$$

Hausaufgabe 2 (ϵ-Produktionen): **(2 Punkte)**

Überführen Sie die folgende Grammatik mit dem in der Vorlesung vorgestellten Verfahren in eine äquivalente Grammatik ohne ϵ-Produktionen.

$$
\begin{array}{lcl}
S & \to & (S+S) \mid (L-S) \mid N \\
N & \to & DA \\
D & \to & 1 \mid 2 \mid 3 \mid 4 \mid 5 \mid 6 \mid 7 \mid 8 \mid 9 \\
A & \to & AA \mid 0 \mid D \mid \epsilon \\
L & \to & S \mid \epsilon
\end{array}
$$

Hinweis: “(” und “)” sind Terminalsymbole.

Tutoraufgabe 3 (Chomsky-Normalform):

Überführen Sie die folgende Grammatik mit dem in der Vorlesung vorgestellten Verfahren in eine äquivalente Grammatik in Chomsky-Normalform.

$$\begin{array}{lcl} S & \to & aB \mid bA \mid ABc \mid B \\ A & \to & SSa \\ B & \to & cS \mid bB \mid b \end{array}$$

Hausaufgabe 4 (Chomsky-Normalform): (4 Punkte)

Überführen Sie die folgende Grammatik mit dem in der Vorlesung vorgestellten Verfahren in eine äquivalente Grammatik in Chomsky-Normalform.

$$\begin{array}{lcl} S & \to & aSbS \mid C \\ C & \to & cC \mid c \end{array}$$

Tutoraufgabe 5 (CYK-Algorithmus):

Gegeben sei die folgende Grammatik G.

$$\begin{array}{lcl} S & \to & SS \mid R_aA \mid R_bB \mid R_cC \\ A & \to & R_bR_c \mid R_cR_b \\ B & \to & R_aR_c \mid R_cR_a \\ C & \to & R_aR_b \mid R_bR_a \\ R_a & \to & a \\ R_b & \to & b \\ R_c & \to & c \end{array}$$

Testen Sie mit dem CYK-Algorithmus, ob die folgenden Wörter von G erzeugt werden.

a) $w_1 = abccab$

b) $w_2 = abcba$

Hausaufgabe 6 (CYK-Algorithmus): (3 + 3 = 6 Punkte)

Gegeben sei die folgende Grammatik G.

$$
\begin{array}{lcl}
S & \to & R_aA \mid R_eB \mid R_gC \mid R_lD \mid R_rE \mid R_aR_a \mid R_eR_e \mid R_gR_g \mid R_lR_l \mid R_rR_r \\
A & \to & SR_a \\
B & \to & SR_e \\
C & \to & SR_g \\
D & \to & SR_l \\
E & \to & SR_r \\
R_a & \to & a \\
R_e & \to & e \\
R_g & \to & g \\
R_l & \to & l \\
R_r & \to & r
\end{array}
$$

Testen Sie mit dem CYK-Algorithmus, ob die folgenden Wörter von G erzeugt werden.

a) $w_1 = regallager$

b) $w_2 = allee$

Tutoraufgabe 7 (Greibach-Normalform):

Verwenden Sie den Algorithmus aus der Vorlesung, um für die folgende Grammatik G eine Grammatik G' in Greibach-Normalform mit $L(G') = L(G)$ zu bestimmen. Verwenden Sie dabei die folgende Ordnung der Nichtterminale: $S < A < B < C$.

$$
\begin{array}{l}
S \to AS \mid SB \\
A \to a \mid CB \\
B \to AC \mid b \\
C \to AB
\end{array}
$$

Hausaufgabe 8 (Greibach-Normalform): (5 Punkte)

Verwenden Sie den Algorithmus aus der Vorlesung, um für die folgende Grammatik G eine Grammatik G' in Greibach-Normalform mit $L(G') = L(G)$ zu bestimmen. Verwenden Sie dabei die folgende Ordnung der Nichtterminale: $S < A < B < C$.

$$
\begin{array}{l}
S \to AB \mid a \\
A \to SA \\
B \to CA \mid b \\
C \to BB \mid c
\end{array}
$$

Tutoraufgabe 9 (Pumping-Lemma):

Prüfen Sie, ob folgende Sprachen über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$ kontextfrei sind. Falls die Sprache nicht kontextfrei ist, beweisen Sie dies mit Hilfe des Pumping-Lemmas für kontextfreie Sprachen. Falls die Sprache kontextfrei ist, geben Sie eine CFG an, welche die Sprache erzeugt.

a) $L_1 = \{(ab)^n(ca)^n(bc)^n \mid n \geq 0\}$

b) $L_2 = \{a^n b^{2n} c \mid n \geq 0\}$

Hausaufgabe 10 (Pumping-Lemma): (3 + 3 + 3 = 9 Punkte)

Prüfen Sie, ob folgende Sprachen über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$ kontextfrei sind. Falls die Sprache nicht kontextfrei ist, beweisen Sie dies mit Hilfe des Pumping-Lemmas für kontextfreie Sprachen. Falls die Sprache kontextfrei ist, geben Sie eine CFG an, welche die Sprache erzeugt. Wir erinnern an die Funktionen $\sharp_z$ für ein Zeichen $z \in \Sigma$, welche die Anzahl der Zeichen z in einem Wort zählen.

a) $L_3 = \{a^n b^{2n} c^{3n} \mid n \geq 0\}$

b) $L_4 = \{w \in \Sigma^* \mid \sharp_a(w) = \sharp_b(w) = \sharp_c(w)\}$

c) $L_5 = \{a^n b^{n^2} \mid n \geq 0\}$

Hausaufgabe 11 (Pumping-Lemma): (2 Punkte)

Zeigen Sie, dass das Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen für jede endliche Sprache erfüllt ist. Beweisen Sie dazu die folgende Aussage:

Sei L eine endliche Sprache. Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$, sodass für jedes $z \in L$ mit $|z| \geq n$ gilt, dass Wörter u, v, w, x, y existieren mit $z = uvwxy$, $|vwx| \leq n$ und $|vx| > 0$, sodass für jedes $i \in \mathbb{N}$ gilt, dass $uv^iwx^iy \in L$.

Sie dürfen in diesem Beweis nicht verwenden, dass *jede* kontextfreie Sprache das Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen erfüllt.