Übersicht

Wörter und Sprachen

Was ist ein Wort, was ist eine Sprache?

Informelle Antwort:

1. Ein Wort ist eine Aneinanderkettung von Symbolen aus einem Alphabet.
2. Eine Sprache ist eine Menge von Wörtern.

Beispiele:

01, 101001, ϵ sind Wörter über dem Alphabet $\{0, 1\}$

$\{0, 1, 101, 1001\}$ und $\{\epsilon, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001, \dots\}$ sind Sprachen über dem Alphabet $\{0, 1\}$.

Wie sieht eine formale, mathematisch korrekte Formalisierung dieser Begriffe aus?

Definition 1.4.1

1. *Eine Halbgruppe* $(H, \circ)$ *besteht aus einer Menge* H *und einer assoziativen Verknüpfung* $\circ : H \times H \to H$.
2. *Ein Monoid ist eine Halbgruppe mit einem neutralen Element.*
3. *Sei* $(M, \circ)$ *ein Monoid und* $E \subseteq M$.
   E *ist ein Erzeugendensystem von* $(M, \circ)$, *falls jedes* $m \in M$ *als* $m = e_1 \circ \cdots \circ e_n$ *mit* $e_i \in E$ *dargestellt werden kann.*

$e_1 \circ \cdots \circ e_n$ bei $n = 0$ ist das neutrale Element.

Ein neutrales Element e ist links- und rechtsneutral.
Für jedes x gilt $e \circ x = x \circ e = x$.

Frage: Ist das neutrale Element in einem Monoid eindeutig?

Ja, denn $e_1 \circ e_2 = e_1$ und $e_1 \circ e_2 = e_2$.

Beispiele

- $(\mathbf{Z}, +)$ ist ein Monoid.
  $\{-1, 1\}$ ein Erzeugendensystem.
- $(\mathbf{N}, +)$ ist ein Monoid.
  $\{1\}$ ein Erzeugendensystem.
- $(\mathbf{Z}_8, \cdot)$ ist ein Monoid.
  $\{2, 3, 5\}$ ein Erzeugendensystem.

Frage:

Ist $\{-16, 17\}$ ein Erzeugendensystem für $(\mathbf{Z}, +)$?

Ist $\{3, 5, 7\}$ ein Erzeugendensystem für $(\mathbf{Z}_\mathbf{8}, \cdot)$?

Freie Erzeugendensysteme

Definition 1.4.2

Ein Erzeugendensystem E für ein Monoid $(M, \circ)$ ist frei, falls jedes $m \in M$ auf nur eine Art als $m = e_1 \circ \cdots \circ e_n$ mit $e_i \in E$ dargestellt werden kann.
Falls E ein freies Erzeugendensystem für $(M, \circ)$ ist, dann sagen wir, dass $(M, \circ)$ das von E frei erzeugte Monoid ist.

Frage:

Ist *das* korrekt?

Beispiele

$(\mathbf{Z}, +)$ ist von $\{-1, 1\}$ nicht frei erzeugt:

- $2 = 1 + 1 = 1 + 1 + (-1) + 1$
- $0 = (-1) + 1 = 1 + (-1)$

$(\mathbf{N}, +)$ ist von $\{1\}$ frei erzeugt.

Isomorphismen zwischen Monoiden

Definition 1.4.3

Zwei Monoide $(M_1, \bullet)$ *und* $(M_2, \circ)$ *sind isomorph, falls es eine Abbildung* $h\colon M_1 \to M_2$ *gibt mit*

1. h *ist bijektiv.*
2. h *ist ein Homomorphismus, d.h.* $h(u \bullet v) = h(u) \circ h(v)$ *für alle* $u, v \in M_1$.

Wir nennen h einen *Isomorphismus*.

Satz 1.4.4

Es sei Σ ein Alphabet. Dann ist das von Σ frei erzeugte Monoid bis auf Isomorphismus eindeutig.

Beweis.

$(M_1, \bullet)$, $(M_2, \circ)$ von Σ frei erzeugte Monoide.

$$h\colon M_1 \to M_2,\; u = a_1 \bullet \cdots \bullet a_n \mapsto a_1 \circ \cdots \circ a_n$$
$$g\colon M_2 \to M_1,\; v = b_1 \circ \cdots \circ b_m \mapsto b_1 \bullet \cdots \bullet b_m$$

mit $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m \in \Sigma$.
$h(g(v)) = v$, also h bijektiv.

$$h(u \bullet v) = h(a_1 \bullet \cdots \bullet a_n \bullet b_1 \bullet \cdots \bullet b_m) = \\ a_1 \circ \cdots \circ a_n \circ b_1 \circ \cdots \circ b_m = h(u) \circ h(v),$$

also ist h ein Homomorphismus. □

Definition 1.4.5

Es sei Σ ein Alphabet.
Dann ist $(\Sigma^*, \cdot)$ das von Σ frei erzeugte Monoid.

Die Elemente von Σ^* nennen wir Wörter (über Σ).

Falls $L \subseteq \Sigma^*$, dann nennen wir L eine Sprache (über Σ).

Falls $u, v \in \Sigma^*$, dann schreiben wir auch $u\,v$ statt $u \cdot v$.

Das neutrale Element von $(\Sigma^*, \cdot)$ bezeichnen wir mit ϵ.

Satz 1.4.6

Es seien Σ und Γ Alphabete. Jede Abbildung $\Sigma \to \Gamma^*$ lässt sich eindeutig auf einen Homomorphismus $\Sigma^* \to \Gamma^*$ erweitern.

Beweis.

Es sei $h\colon \Sigma^* \to \Gamma^*$ ein Homomorphismus. Dann ist $h(w) = h(a_1 \ldots a_n)$ mit $a_1, \ldots, a_n \in \Sigma = h(a_1) \ldots h(a_n)$ weil h ein Homomorphismus ist. $\square$

Wenn wir einen Homomorphismus definieren wollen, genügt es, seine Wirkung auf Symbole zu beschreiben.