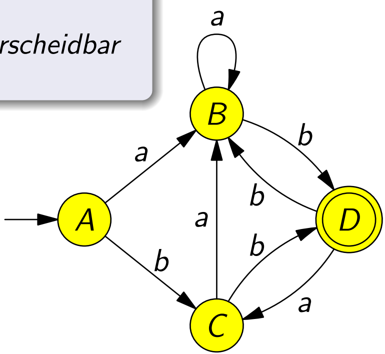
Übersicht

Minimierung von DFAs

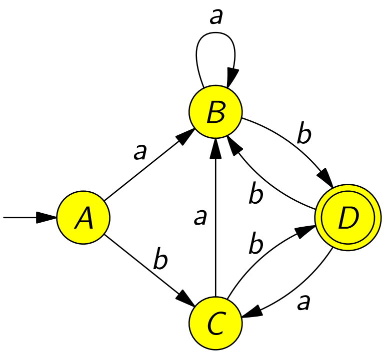
Definition 2.7.1

Es sei $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ *ein DFA.*
$q_1, q_2 \in Q$ *sind unterscheidbar, falls*

1. $q_1 \in F$, $q_2 \notin F$ *oder*
2. $q_1 \notin F$, $q_2 \in F$ *oder*
3. $\delta(q_1, a)$ *und* $\delta(q_2, a)$ *sind unterscheidbar für ein* $a \in \Sigma$.



Beispiel 1



U	A	B	C	D
A		×	×	×
B	×			×
C	×			×
D	×	×	×	

Lemma 2.7.2

Es sei $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein DFA.
$q_1, q_2 \in Q$ sind unterscheidbar gdw. es ein $w \in \Sigma^*$ gibt mit

- $\hat{\delta}(q_1, w) \in F$, $\hat{\delta}(q_2, w) \notin F$ *oder*
- $\hat{\delta}(q_1, w) \notin F$, $\hat{\delta}(q_2, w) \in F$.

Beweis.

„$\Longleftarrow$“ Induktion über $|w|$:

$|w| = 0$: Dann $\hat{\delta}(q, w) = q$ für alle q. Damit $q_1 \in F \Leftrightarrow q_2 \notin F$.

$|w| > 0$: Sei $w = a\,v$ mit $a \in \Sigma$. Sei $q_1' = \delta(q_1, a)$, $q_2' = \delta(q_2, a)$.

Dann: $\hat{\delta}(q_1', v) \in F \Leftrightarrow \hat{\delta}(q_2', v) \notin F$.
Daher: q_1', q_2' unterscheidbar nach Induktionshypothese.
Deshalb sind auch q_1, q_2 unterscheidbar.

„$\Longrightarrow$“ ... $\square$

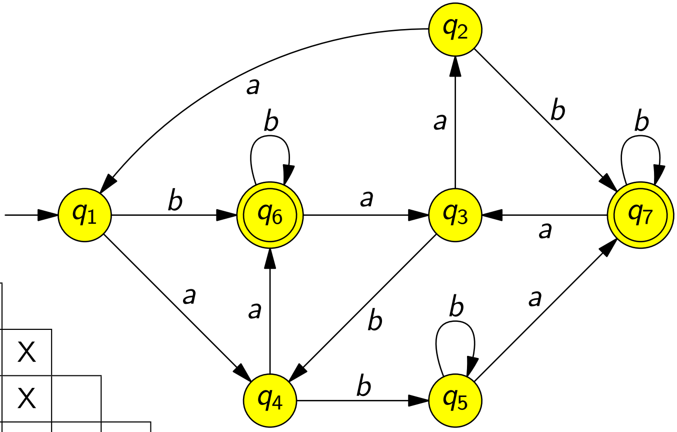
Markierungsalgorithmus

$U := \emptyset;$
for $((q,p) \in Q \times Q)$ $\{$
  if $(p \in F \wedge q \notin F)$ $U := U \cup \{(q,p)\};$
  if $(p \notin F \wedge q \in F)$ $U := U \cup \{(q,p)\};$
$\}$
do $\{$
  $U_{old} := U;$
  for $((q,p) \in Q \times Q)$
    for $(a \in \Sigma)$
      if $((\delta(q,a),\delta(p,a)) \in U)$ $U := U \cup \{(q,p)\};$
$\}$ **while** $(U_{old} \mathrel{!}= U);$

Laufzeit: Sehr grobe Abschätzung $O(|Q|^4)$

- **for**-Schleife: $O(|Q|^2)$ mal durchlaufen
- **do while**-Schleife: $O(|Q|^2)$ mal durchlaufen

Beispiel 2



2	X					
3	X	X				
4	X	X	X			
5	X	X	X			
6	X	X	X	X	X	
7	X	X	X	X	X	(4, 5) (1, 2)
	1	2	3	4	5	6

Schnellerer Markierungsalgorithmus

$U := \varnothing;$
for $((q,p) \in Q \times Q)$ $\{$
  if $(p \in F \wedge q \notin F)$ $U := U \cup \{(q,p)\};$
  if $(p \notin F \wedge q \in F)$ $U := U \cup \{(q,p)\};$
$\}$
for $((q,p) \in Q \times Q)$
  for $(a \in \Sigma)$ $\{$
    $q' := \delta(q,a); p' := \delta(p,a);$
    if $((q',p') \in U)$ $\{$
      $U := U \cup \{(q,p)\};$
      Füge $L(q,p)$ in U ein;
    $\}$
    else $L(q',p') := L(q',p') \cup \{(q,p)\};$
  $\}$

Laufzeit: $O(|Q|^2)$

Konstruktion des minimalen DFA

Lemma 2.7.3

Es sei $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ *ein DFA und* $u, v \in \Sigma^*$.
Weiter sei $p = \hat{\delta}(q_0, u)$ *und* $q = \hat{\delta}(q_0, v)$.

Falls $u \equiv_{L(M)} v$, *dann sind* p *und* q *nicht unterscheidbar.*

Beweis.

Sonst gäbe es w mit $\hat{\delta}(p, w) \in F \Leftrightarrow \hat{\delta}(q, w) \notin F$,
wegen Lemma 2.7.2.

Dann gilt auch $\hat{\delta}(q_0, u\,w) \in F \Leftrightarrow \hat{\delta}(q_0, v\,w) \notin F$.

Damit ist $u\,w \in L(M) \Leftrightarrow v\,w \notin L(M)$.

Das ist ein Widerspruch zu $u \equiv_{L(M)} v$. $\square$

Konstruktion des minimalen DFA

Satz 2.7.4

Verschmelzen wir die nicht unterscheidbaren Zustände eines DFA, erhalten wir den zugehörigen minimalen DFA.

Beweis.

Lemma 2.7.3:
Falls es keine nicht unterscheidbaren Zustände gibt,
dann ist $\sim \, = \, \equiv_{L(M)}$.

Satz von Myhill–Nerode (Satz 2.6.4):
Der Automat ist minimal. □