

Übersicht

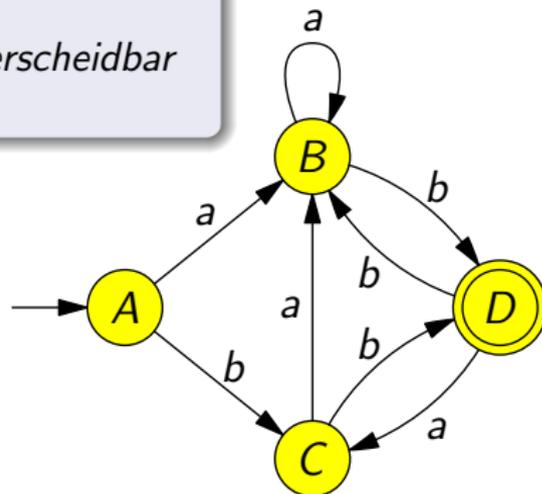
- ② 2 Reguläre Sprachen
 - 2.1 Reguläre Ausdrücke
 - 2.2 Endliche Automaten
 - 2.3 Nichtdeterministische endliche Automaten
 - 2.4 Die Potenzmengenkonstruktion
 - 2.5 NFAs mit ϵ -Übergängen
 - 2.6 Minimale DFAs und der Satz von Myhill-Nerode
 - 2.7 Berechnung des minimalen DFA
 - 2.8 Umwandlung eines Automaten in einen regulären Ausdruck II
 - 2.9 Das Pumping-Lemma
 - 2.10 Entscheidungsprobleme für reguläre Sprachen

Minimierung von DFAs

Definition 2.7.1

Es sei $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein DFA.
 $q_1, q_2 \in Q$ sind unterscheidbar, falls

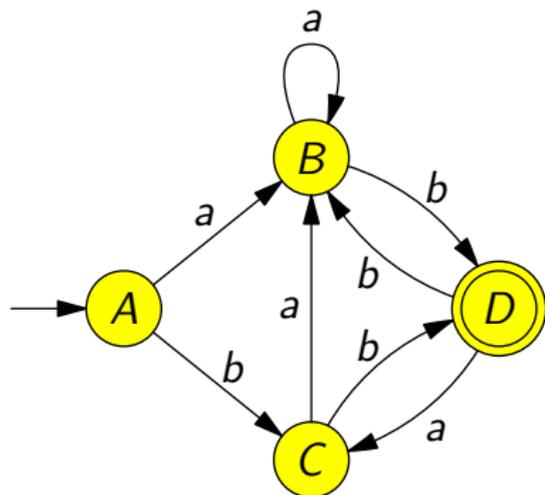
- 1 $q_1 \in F, q_2 \notin F$ oder
- 2 $q_1 \notin F, q_2 \in F$ oder
- 3 $\delta(q_1, a)$ und $\delta(q_2, a)$ sind unterscheidbar für ein $a \in \Sigma$.



2 Reguläre Sprachen

2.7 Berechnung des minimalen DFA

Beispiel 1



U	A	B	C	D
A		×	×	×
B	×			×
C	×			×
D	×	×	×	

Lemma 2.7.2

Es sei $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein DFA.

$q_1, q_2 \in Q$ sind unterscheidbar gdw. es ein $w \in \Sigma^*$ gibt mit

- $\hat{\delta}(q_1, w) \in F, \hat{\delta}(q_2, w) \notin F$ oder
- $\hat{\delta}(q_1, w) \notin F, \hat{\delta}(q_2, w) \in F$.

Beweis.

„ \Leftarrow “ Induktion über $|w|$:

$|w| = 0$: Dann $\hat{\delta}(q, w) = q$ für alle q . Damit $q_1 \in F \Leftrightarrow q_2 \in F$.

$|w| > 0$: Sei $w = a v$ mit $a \in \Sigma$. Sei $q'_1 = \delta(q_1, a), q'_2 = \delta(q_2, a)$.

Dann: $\hat{\delta}(q'_1, v) \in F \Leftrightarrow \hat{\delta}(q'_2, v) \notin F$.

Daher: q'_1, q'_2 unterscheidbar nach Induktionshypothese.

Deshalb sind auch q_1, q_2 unterscheidbar.

„ \Rightarrow “ ...



Markierungsalgorithmus

```
U := ∅;  
for ((q, p) ∈ Q × Q) {  
    if (p ∈ F ∧ q ∉ F) U := U ∪ {(q, p)};  
    if (p ∉ F ∧ q ∈ F) U := U ∪ {(q, p)};  
}  
do {  
    Uold := U;  
    for ((q, p) ∈ Q × Q)  
        for (a ∈ Σ)  
            if ((δ(q, a), δ(p, a)) ∈ U) U := U ∪ {(q, p)};  
} while (Uold ≠ U);
```

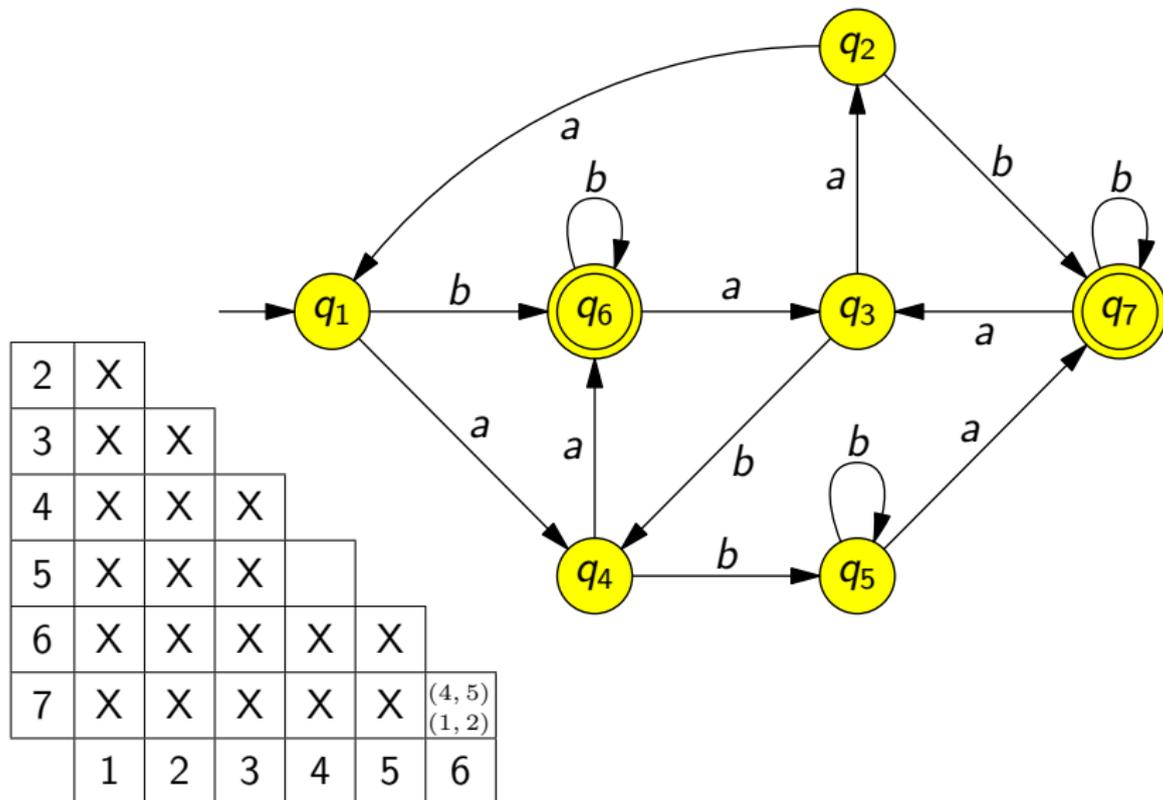
Laufzeit: Sehr grobe Abschätzung $O(|Q|^4)$

- **for**-Schleife: $O(|Q|^2)$ mal durchlaufen
- **do while**-Schleife: $O(|Q|^2)$ mal durchlaufen

2 Reguläre Sprachen

2.7 Berechnung des minimalen DFA

Beispiel 2



Schnellerer Markierungsalgorithmus

```
U := ∅;  
for ((q, p) ∈ Q × Q) {  
    if (p ∈ F ∧ q ∉ F) U := U ∪ {(q, p)};  
    if (p ∉ F ∧ q ∈ F) U := U ∪ {(q, p)};  
}  
for ((q, p) ∈ Q × Q)  
    for (a ∈ Σ) {  
        q' := δ(q, a); p' := δ(p, a);  
        if ((q', p') ∈ U) {  
            U := U ∪ {(q, p)};  
            Füge L(q, p) in U ein;  
        }  
        else L(q', p') := L(q', p') ∪ {(q, p)};  
    }  
}
```

Laufzeit: $O(|Q|^2)$

Konstruktion des minimalen DFA

Lemma 2.7.3

Es sei $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein DFA und $u, v \in \Sigma^$.*

Weiter sei $p = \hat{\delta}(q_0, u)$ und $q = \hat{\delta}(q_0, v)$.

Falls $u \equiv_{L(M)} v$, dann sind p und q nicht unterscheidbar.

Beweis.

Sonst gäbe es w mit $\hat{\delta}(p, w) \in F \Leftrightarrow \hat{\delta}(q, w) \notin F$,
wegen Lemma 2.7.2.

Dann gilt auch $\hat{\delta}(q_0, u w) \in F \Leftrightarrow \hat{\delta}(q_0, v w) \notin F$.

Damit ist $u w \in L(M) \Leftrightarrow v w \notin L(M)$.

Das ist ein Widerspruch zu $u \equiv_{L(M)} v$. □

Konstruktion des minimalen DFA

Satz 2.7.4

Verschmelzen wir die nicht unterscheidbaren Zustände eines DFA, erhalten wir den zugehörigen minimalen DFA.

Beweis.

Lemma 2.7.3:

Falls es keine nicht unterscheidbaren Zustände gibt, dann ist $\sim = \equiv_{L(M)}$.

Satz von Myhill–Nerode (Satz 2.6.4):

Der Automat ist minimal. □