

# Übersicht

- 2 2 Reguläre Sprachen
  - 2.1 Reguläre Ausdrücke
  - 2.2 Endliche Automaten
  - 2.3 Nichtdeterministische endliche Automaten
  - 2.4 Die Potenzmengenkonstruktion
  - 2.5 NFAs mit  $\epsilon$ -Übergängen
  - 2.6 Minimale DFAs und der Satz von Myhill-Nerode
  - 2.7 Berechnung des minimalen DFA
  - 2.8 Umwandlung eines Automaten in einen regulären Ausdruck II
  - 2.9 Das Pumping-Lemma
  - 2.10 Entscheidungsprobleme für reguläre Sprachen

### Satz 2.9.1 (Pumping-Lemma)

Sei  $L$  eine reguläre Sprache. Dann gibt es  $n \in \mathbf{N}$ , so dass jedes Wort  $w \in L$  mit  $|w| \geq n$  in  $w = x y z$  zerlegt werden kann mit

- 1  $|x y| \leq n$
- 2  $|y| > 0$
- 3  $x y^i z \in L$  für alle  $i \geq 0$

### Beweis.

Es sei  $L = L(M)$  für einen DFA  $M$  mit  $n$  Zuständen.

Ist  $|w| \geq n$ , dann durchläuft  $M$  einen Zustand doppelt.

Sei  $p$  der erste solche Zustand.

Es gibt also  $w = x y z$  mit

- $\hat{\delta}(q_0, x) = p$ ,
- $\hat{\delta}(p, y) = p$ ,  $|x y| \leq n$ ,  $|y| > 0$ ,
- $x y^i z \in L$



# Das Pumping-Lemma als Spiel

Gegeben sei eine Sprache  $L \subseteq \Sigma^*$ .

- 1 Alice wählt eine Zahl  $n$ .
- 2 Bob wählt ein Wort  $w \in L$  mit  $|w| \geq n$ .
- 3 Alice wählt  $x, y, z \in \Sigma^*$  mit  $w = xyz$ ,  $|xy| \leq n$ ,  $|y| > 0$ .
- 4 Bob wählt eine Zahl  $i$ .

Alice gewinnt, wenn  $xy^iz \in L$ .

Bob gewinnt, wenn  $xy^iz \notin L$ .

Falls  $L$  regulär ist, kann Alice immer gewinnen.

(Gewinnstrategie für Alice)

Falls Bob immer gewinnen kann, dann ist  $L$  nicht regulär.

(Gewinnstrategie für Bob)

# Beispiel

Es sei  $L = \{ a^n b^n \mid n \geq 0 \}$ .

- 1 Alice wählt eine Zahl  $n$ .
- 2 Bob wählt  $w = a^n b^n$ .
- 3 Alice wählt  $x, y, z \in \{a, b\}^*$  mit  $w = x y z$ ,  $|x y| \leq n$ ,  $|y| > 0$ .
- 4 Bob wählt  $i = 2$ .

Bob hat gewonnen:

$x y z$  enthält mehr Vorkommen von  $a$  als von  $b$ .

Also ist  $L$  nicht regulär.

# Beispiel

Es sei  $L = \{ a^{n^3} \mid n \geq 0 \}$ .

- 1 Alice wählt eine Zahl  $n$ .
- 2 Bob wählt  $w = a^{m^3}$  mit  $m = n + 3$ .
- 3 Alice wählt  $x, y, z \in a^*$  mit  $w = x y z$ ,  $|x y| \leq n$ ,  $|y| > 0$ .
- 4 Bob weiß:  $x = a^r$ ,  $y = a^s$ ,  $z = a^t$  mit  $r + s + t = m^3$ .  
Bob wählt  $i = 0$ . Dann ist  $x y^0 z$  nicht in  $L$ :

$$(m-1)^3 = m^3 - 3m^2 + 3m - 1 < m^3 - m \leq |x y^0 z| = r + t < m^3$$

Also ist  $L$  nicht regulär.