

Übersicht

- ③ 3 Kontextfreie Sprachen
 - 3.1 Kontextfreie Sprachen und Grammatiken
 - 3.2 Ableitungsbäume
 - 3.3 Die pre^* -Operation
 - 3.4 Entscheidungsprobleme für CFGs
 - 3.5 Normalformen für CFGs
 - 3.6 Chomsky-Normalform
 - 3.7 Greibach-Normalform
 - 3.8 Das Pumping-Lemma für CFLs
 - 3.9 Kellerautomaten
 - 3.10 Deterministische Kellerautomaten
 - 3.11 Abschlusseigenschaften kontextfreier Sprachen

Die pre^* -Operation

Definition 3.3.1

Es sei $G = (N, T, P, S)$ eine CFG und $L \subseteq (N \cup T)^*$ eine beliebige Sprache.

Wir definieren

$$pre_G^*(L) = \{ \alpha \in (N \cup T)^* \mid \alpha \xRightarrow{*}_G \beta \text{ für ein } \beta \in L \}.$$

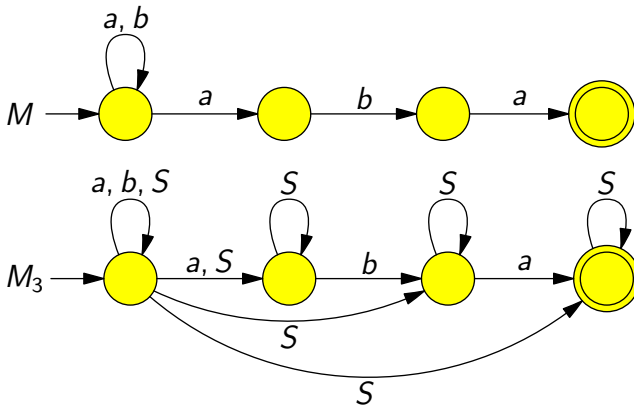
Satz 3.3.2

Falls L regulär ist, dann ist auch $pre_G^*(L)$ regulär.

Satz 3.3.2

Falls L regulär ist, dann ist auch $pre_G^*(L)$ regulär.

$G: S \rightarrow aSa \mid bSb \mid aSb \mid \epsilon$



Sättigungsschritte

Sei $L = L(M)$ für einen NFA M .

Wir transformieren M in einen NFA M' mit $L(M') = pre_G^*(L)$ durch folgende Regeln:

Falls

- 1 $A \rightarrow \alpha \in P$ und
- 2 $p \in \hat{\delta}(q, \alpha)$

dann füge den Übergang $q \xrightarrow{A} p$ zum Automaten hinzu.

Wiederhole dies, bis nichts mehr hinzugefügt werden kann.

Definition 3.3.3

Es sei $G = (N, T, P, S)$ eine CFG und $M = (Q, \Sigma, \delta_0, q_0, F)$ ein NFA mit $\Sigma = N \cup T$.

Wir definieren für $k \geq 0$:

- 1 $M_0 = M$
- 2 $M_{k+1} = (Q, \Sigma, \delta_{k+1}, q_0, F)$ mit
$$\delta_{k+1}(q, a) = \delta_k(q, a) \text{ falls } a \in T,$$
$$\delta_{k+1}(q, A) = \delta_k(q, A) \cup \{p \in Q \mid p \in \hat{\delta}_k(q, \beta) \text{ und } A \rightarrow \beta \in P\}.$$

Definition 3.3.4

Es sei $L \subseteq \Sigma^*$ eine Sprache und $G = (N, T, P, S)$ eine CFG mit $\Sigma = N \cup T$.

- 1 $pre^0(L) := L$
- 2 $pre^{k+1}(L) := \{ \alpha \mid \alpha \Rightarrow \beta \text{ für ein } \beta \in pre^k(L) \} \cup pre^k(L)$

Offensichtlich:

$$pre^*(L) = \bigcup_{n \geq 0} pre^n(L)$$

Induktion über k : $pre^k(L) \subseteq L(M_k)$

Es sei $\alpha \in pre^k(L)$. Zwei Möglichkeiten:

$$\textcircled{1} \quad \alpha \in pre^{k-1}(L) \stackrel{\text{IH}}{\subseteq} L(M_{k-1}) \subseteq L(M_k).$$

$$\textcircled{2} \quad \alpha \Rightarrow \beta \text{ und } \beta \in pre^{k-1}(L) \stackrel{\text{IH}}{\subseteq} L(M_{k-1}).$$

D.h. $\alpha = \alpha_1 A \alpha_2$, $\beta = \alpha_1 \gamma \alpha_2$ und $A \rightarrow \gamma \in P$.

Nach IH gilt $\beta \in L(M_{k-1})$, also

$$q_1 \in \hat{\delta}_{k-1}(q_0, \alpha_1)$$

$$q_2 \in \hat{\delta}_{k-1}(q_1, \gamma)$$

$$q_3 \in \hat{\delta}_{k-1}(q_2, \alpha_2) \text{ mit } q_3 \in F$$

Dann gilt $q_2 \in \delta_k(q_1, A)$ und daher $q_3 \in \hat{\delta}_k(q_0, \alpha)$.

3 Kontextfreie Sprachen

3.3 Die pre^* -Operation

Induktion über k : $L(M_k) \subseteq pre^*(L)$

Es sei $\alpha \in L(M_k)$.

Wieder zwei Möglichkeiten:

- 1 $\alpha \in L(M_{k-1})$, dann $\alpha \in pre^*(L)$ nach IH.
- 2 Sonst:

$$\alpha = \alpha_0 A_0 \alpha_1 A_1 \dots \alpha_m A_m \alpha_{m+1}$$

$$\beta = \alpha_0 \beta_0 \alpha_1 \beta_1 \dots \alpha_m \beta_m \alpha_{m+1}$$

und $\beta \in L(M_{k-1})$, $A_i \rightarrow \beta_i \in P$ für $0 \leq i \leq m$.

Nach IH gilt $\beta \in pre^*(L)$.

Es gilt $\alpha \xrightarrow{*} \beta$ und damit auch $\alpha \in pre^*(L)$.

Beweis der zentralen Aussage

Satz 3.3.2

Falls L regulär ist, dann ist auch $pre_G^(L)$ regulär.*

Beweis.

Wir haben bereits gezeigt:

- 1 $pre^k(L) \subseteq L(M_k)$
- 2 $L(M_k) \subseteq pre^*(L)$

Außerdem: $L(M_m) = L(M_{m+1}) = L(M_{m+2}) = \dots$ für ein $m \in \mathbf{N}$.

Es folgt daraus, dass $L(M_m) = pre^*(L)$.

$L(M_m)$ ist als Sprache eines NFAs regulär. □