Übersicht

Das Wortproblem

Definition 3.4.1

Das Wortproblem für CFG:

- *Eingabe: Eine CFG* $G = (N, T, P, S)$ *und ein Wort* $w \in T^*$
- *Frage: Gilt* $w \in L(G)$*?*

Satz 3.4.2

Das Wortproblem für CFG lässt sich in polynomieller Zeit lösen.

Beweis.

$w \in L(G)$ gdw. $S \in pre^*(\{w\})$. □

Unproduktive Symbole

Definition 3.4.3

Finden von unproduktiven Symbolen einer CFG:

- *Eingabe: Eine CFG* $G = (N, T, P, S)$
- *Ausgabe: Eine Liste der unproduktiven Symbole von* G*:* $\{ A \in N \mid \text{ es gibt kein } w \in T^* \text{ mit } A \overset{*}{\Rightarrow} w \}$

Satz 3.4.4

Unproduktive Symbole einer CFG lassen sich in polynomieller Zeit finden.

Beweis.

Die Menge der produktiven Symbole ist $N \cap pre^*(T^*)$. □

Das Leerheitsproblem

Definition 3.4.5

Das Leerheitsproblem für CFG:

- *Eingabe: Eine CFG* $G = (N, T, P, S)$
- *Frage: Ist* $L(G) = \varnothing$*?*

Satz 3.4.6

Das Leerheitsproblem für CFG lässt sich in polynomieller Zeit lösen.

Beweis.

Es ist $L(G) = \varnothing$ gdw. $S \notin pre^*(T^*)$. □

Unerreichbare Symbole

Definition 3.4.7

Finden von unerreichbaren Symbolen einer CFG:

- *Eingabe: Eine CFG* $G = (N, T, P, S)$
- *Ausgabe: Eine Liste der unerreichbaren Symbole von* G*:* $\{ A \in N \mid \text{ es gibt kein } \alpha A \beta \in (N \cup T)^* \text{ mit } S \overset{*}{\Rightarrow} \alpha A \beta \}$

Satz 3.4.8

Unerreichbare Symbole einer CFG lassen sich in polynomieller Zeit finden.

Beweis.

A unerreichbar gdw. $S \notin pre^*((N \cup T)^* A (N \cup T)^*)$ $\square$

Nullierbare Symbole

Definition 3.4.9

Finden von nullierbaren Symbolen einer CFG:

- *Eingabe: Eine CFG* $G = (N, T, P, S)$
- *Ausgabe: Eine Liste der nullierbaren Symbole von* G*:* $\{\, A \in N \mid A \overset{*}{\Rightarrow} \epsilon \,\}$

Satz 3.4.10

Nullierbare Symbole einer CFG lassen sich in polynomieller Zeit finden.

Beweis.

Die Menge der nullierbaren Symbole ist $N \cap pre^*(\{\epsilon\})$. □

Das Endlichkeitsproblem für CFG

Definition 3.4.11

Das Endlichkeitsproblem für CFG:

- *Eingabe: Eine CFG* $G = (N, T, P, S)$
- *Frage: Ist* $L(G)$ *endlich?*

Satz 3.4.12

Das Endlichkeitsproblem lässt sich in polynomieller Zeit lösen.

Beweis.

Ersetze G durch G' mit $L(G') = L(G)$, aber G' enthält keine unproduktiven oder unerreichbaren Symbole.

$|L(G)| = \infty$ gdw. es gibt $A \in N$ mit

$$A \in pre^*_{G'}\big((N \cup T)^*\, T\, (N \cup T)^*\, A\, (N \cup T)^* \cup (N \cup T)^*\, A\, (N \cup T)^*\, T\, (N \cup T)^*\big) \qquad \square$$

Das Schnittleerheitsproblem für CFG

Definition 3.4.13

Das Schnittleerheitsproblem für CFG:

- *Eingabe: Zwei CFG G_1 und G_2*
- *Frage: Ist $L(G_1) \cap L(G_2) = \varnothing$?*

Satz 3.4.14

Das Schnittleerheitsproblem für CFG ist nicht berechenbar.

Beweis.

Idee: Gäbe es einen Algorithmus für dieses Problem, dann wäre auch das Post'sche Korrespondenzproblem lösbar. $\square$

Das Post'sche Korrespondenzproblem

Gegeben ist eine Menge von Karten dieser Form:

$$\boxed{\begin{array}{c}10\\ \\ 0\end{array}},\ \boxed{\begin{array}{c}0\\ \\ 001\end{array}},\ \boxed{\begin{array}{c}001\\ \\ 1\end{array}}$$

Frage:
Kann ich Karten dieser Art so aneinanderlegen, dass oben und unten dasselbe Wort entsteht?

(Jede Karte kann beliebig oft verwendet werden)

In *Berechenbarkeit und Komplexität* wird folgendes bewiesen:

Satz 3.4.15

Das Post'sche Korrespondenzproblem ist nicht entscheidbar.

Satz 3.4.14

Das Schnittleerheitsproblem für CFG ist nicht entscheidbar.

Beweis.

Sei I eine beliebige PCP-Instanz:

$$I := \left\{ \boxed{\begin{array}{c} u_1 \\ \\ v_1 \end{array}}, \boxed{\begin{array}{c} u_2 \\ \\ v_2 \end{array}}, \ldots, \boxed{\begin{array}{c} u_n \\ \\ v_n \end{array}} \right\}$$

Konstruiere zwei Grammatiken:

G_1: $S \to u_1 A v_1^R \mid \cdots \mid u_n A v_n^R, \quad A \to S \mid \$$

G_2: $S \to 0S0 \mid 1S1 \mid \$$

Behauptung: $L(G_1) \cap L(G_2) \neq \varnothing$ gdw. I lösbar. □

Das Eindeutigkeitsproblem für CFG

Definition 3.4.16

Das Eindeutigkeitsproblem für CFG:

- *Eingabe: Eine CFG G*
- *Frage: Ist G eine eindeutige CFG?*

Satz 3.4.17

Das Eindeutigkeitsproblem für CFG ist nicht berechenbar.

Beweis.

Idee: Gäbe es einen Algorithmus für dieses Problem, dann wäre auch das Post'sche Korrespondenzproblem lösbar. $\square$

Beweis.

Es sei

$$I := \left\{ \boxed{\begin{matrix} u_1 \\ \\ v_1 \end{matrix}}, \boxed{\begin{matrix} u_2 \\ \\ v_2 \end{matrix}}, \dots, \boxed{\begin{matrix} u_n \\ \\ v_n \end{matrix}} \right\}$$

eine PCP-Instanz.

$$\begin{aligned} S &\to A \mid B \\ A &\to u_1 A x_1 \mid u_2 A x_2 \mid \cdots \mid u_n A x_n \mid u_1 x_1 \mid u_2 x_2 \mid \cdots \mid u_n x_n \\ B &\to v_1 B x_1 \mid v_2 B x_2 \mid \cdots \mid v_n B x_n \mid v_1 x_1 \mid v_2 x_2 \mid \cdots \mid v_n x_n \end{aligned}$$

Behauptung:

Die Grammatik ist eindeutig gdw. I keine Lösung besitzt. □

Das Universalitätsproblem für CFG

Definition 3.4.18

Das Universalitätsproblem für CFG:

- *Eingabe: Eine CFG* $G = (N, T, P, S)$
- *Frage: Ist* $L(G) = T^*$*?*

Satz 3.4.19

Das Universalitätsproblem für CFG ist nicht berechenbar.

Beweis.

Idee: Post'sches Korrespondenzproblem. □

Beweis.

$$I := \left\{ \boxed{\begin{matrix} u_1 \\ \\ v_1 \end{matrix}}, \boxed{\begin{matrix} u_2 \\ \\ v_2 \end{matrix}}, \dots, \boxed{\begin{matrix} u_n \\ \\ v_n \end{matrix}} \right\}$$

- $L_1 = \{\, h^{-1}(w\$w^R) \mid w \in \{0,1\}^* \,\}$,
  $h\colon 0 \mapsto 0, 1 \mapsto 1, ¢ \mapsto \epsilon, \$ \mapsto \$$
- $L_2 = \{u_{i_1}¢ \dots ¢\, u_{i_k}\$v_{i_k}^R¢ \dots ¢\, v_{i_1}^R \mid 1 \le i_1, \dots, i_k \le n,\ k \ge 1\}$

Technisch aufwendig, aber gar nicht so schwer:

$\{0,1,¢,\$\}^* \setminus L_1$ und $\{0,1,¢,\$\}^* \setminus L_2$ sind kontextfreie Sprachen.

Dann ist auch $L = \{0,1,¢,\$\}^* \setminus (L_1 \cap L_2)$ kontextfrei.

Es gilt aber $L = \{0,1,¢,\$\}^*$ gdw. I keine Lösung hat. □

Das Sprachäquivalenzproblem für CFG

Definition 3.4.20

Das Sprachäquivalenzproblem für CFG:

- *Eingabe: Zwei CFGs G_1 und G_2*
- *Frage: Ist $L(G_1) = L(G_2)$?*

Satz 3.4.21

Das Sprachäquivalenzproblem für CFG ist nicht berechenbar.

Beweis.

Gegeben $G = (N, T, P, S)$. Konstruiere G' mit $L(G') = T^*$.

$L(G') = L(G)$ gdw. $L(G) = T^*$.

Wäre das Sprachäquivalenzproblem berechenbar, dann wäre auch das Universalitätsproblem berechenbar. □

Das Inklusionsproblem für CFG

Definition 3.4.22

Das Inklusionsproblem für CFG:

- *Eingabe: Zwei CFGs G_1 und G_2*
- *Frage: Ist $L(G_1) \subseteq L(G_2)$?*

Satz 3.4.23

Das Inklusionsproblem für CFG ist nicht berechenbar.

Beweis.

Gegeben $G = (N, T, P, S)$. Konstruiere G' mit $L(G') = T^*$.

$L(G') \subseteq L(G)$ gdw. $L(G) = T^*$.

Wäre das Inklusionsproblem berechenbar, dann wäre auch das Universalitätsproblem berechenbar. □