Übersicht

Das Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen

Satz 2.9.1 (Pumping-Lemma für reguläre Sprachen)

Sei L eine reguläre Sprache. Dann gibt es $n \in \mathbf{N}$, so dass jedes Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$ in $z = u\,v\,y$ zerlegt werden kann mit

1. $|u\,v| \leq n$
2. $|v| > 0$
3. $u\,v^i\,y \in L$ für alle $i \geq 0$

Satz 3.8.1 (Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen)

Sei L eine kontextfreie Sprache. Dann gibt es $n \in \mathbf{N}$, so dass jedes Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$ in $z = u\,v\,w\,x\,y$ zerlegt werden kann mit

1. $|v\,w\,x| \leq n$
2. $|v\,x| > 0$
3. $u\,v^i\,w\,x^i\,y \in L$ *für alle* $i \geq 0$

Das Pumping-Lemma als Spiel

Gegeben sei eine Sprache L.

1. Alice wählt eine Zahl n.
2. Bob wählt ein Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$.
3. Alice wählt Wörter u, v, w, x, y mit $z = u\,v\,w\,x\,y$, $|v\,w\,x| \leq n$, $|v\,x| > 0$.
4. Bob wählt eine Zahl i.

Alice gewinnt, wenn $u\,v^i\,w\,x^i\,y \in L$.
Bob gewinnt, wenn $u\,v^i\,w\,x^i\,y \notin L$.

Falls L kontextfrei ist, kann Alice immer gewinnen.
(Gewinnstrategie für Alice)

Falls Bob immer gewinnen kann, dann ist L nicht kontextfrei.
(Gewinnstrategie für Bob)

Beispiel

Es sei $L = \{\, a^n\, b^n\, c^n \mid n > 0 \,\}$.

1. Alice wählt eine Zahl n.
2. Bob wählt $z = a^n\, b^n\, c^n$.
3. Alice wählt $u, v, w, x, y \in \{a, b, c\}^*$ mit $z = u\, v\, w\, x\, y$, $|v\, w\, x| \leq n$, $|v\, x| > 0$.

   Dann enthält $v\, x$ kein a oder kein c.
4. Bob wählt $i = 2$.

Bob hat gewonnen:

$u\, v^2\, w\, x^2\, y \notin L$, da es zu wenig a oder c enthält

Also ist L nicht kontextfrei.

Beispiel

Es sei $L = \{\, w\, w \mid w \in \{0,1\}^* \,\}$.

1. Alice wählt eine Zahl n.
2. Bob wählt $z = 0^n\, 1^n\, 0^n\, 1^n$.
3. Alice wählt $u, v, w, x, y \in \{0,1\}^*$ mit $z = u\, v\, w\, x\, y$, $|v\, w\, x| \le n$, $|v\, x| > 0$.

   Dann ist $v\, x = 0^m 1^k$ oder $v\, x = 1^m 0^k$, wobei $m > 0$ oder $k > 0$.
4. Bob wählt $i = 0$.

Bob hat gewonnen:

$u\, w\, y \notin L$ (durch Fallunterscheidung leicht zu sehen)

Also ist L nicht kontextfrei.

Beispiel

Es sei $L = \{\, w\, w^R \mid w \in \{0,1\}^* \,\}$.

1. Alice wählt die Zahl $n = 2$.
2. Bob wählt ein $z \in L$ mit $|z| \geq 2$.

   Dann ist $z = t\, a\, a\, t^R$ für ein $t \in \Sigma^*$ und ein $a \in \Sigma$.
3. Alice wählt $u = t$, $v = a$, $w = \epsilon$, $x = a$, $y = t^R$.
   Dann ist $|v\, w\, x| = 2$, $|v\, x| = 2 > 0$.
4. Bob wählt ein $i \geq 0$.

Alice hat gewonnen:

$u\, v^i\, w\, x^i\, y \in L$

Also erfüllt L das Pumping Lemma
(klar, denn L ist offensichtlich kontextfrei).