

# Übersicht

- 3 3 Kontextfreie Sprachen
  - 3.1 Kontextfreie Sprachen und Grammatiken
  - 3.2 Ableitungsbäume
  - 3.3 Die  $pre^*$ -Operation
  - 3.4 Entscheidungsprobleme für CFGs
  - 3.5 Normalformen für CFGs
  - 3.6 Chomsky-Normalform
  - 3.7 Greibach-Normalform
  - 3.8 Das Pumping-Lemma für CFLs
  - 3.9 Kellerautomaten
  - 3.10 Deterministische Kellerautomaten
  - 3.11 Abschlusseigenschaften kontextfreier Sprachen

## Das Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen

### Satz 2.9.1 (Pumping-Lemma für reguläre Sprachen)

Sei  $L$  eine reguläre Sprache. Dann gibt es  $n \in \mathbf{N}$ , so dass jedes Wort  $z \in L$  mit  $|z| \geq n$  in  $z = uv y$  zerlegt werden kann mit

- 1  $|uv| \leq n$
- 2  $|v| > 0$
- 3  $u v^i y \in L$  für alle  $i \geq 0$

### Satz 3.8.1 (Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen)

Sei  $L$  eine kontextfreie Sprache. Dann gibt es  $n \in \mathbf{N}$ , so dass jedes Wort  $z \in L$  mit  $|z| \geq n$  in  $z = uvwx y$  zerlegt werden kann mit

- 1  $|vwx| \leq n$
- 2  $|vx| > 0$
- 3  $u v^i w x^i y \in L$  für alle  $i \geq 0$

## Das Pumping-Lemma als Spiel

Gegeben sei eine Sprache  $L$ .

- 1 Alice wählt eine Zahl  $n$ .
- 2 Bob wählt ein Wort  $z \in L$  mit  $|z| \geq n$ .
- 3 Alice wählt Wörter  $u, v, w, x, y$  mit  $z = uvwx y$ ,  
 $|vwx| \leq n$ ,  $|vx| > 0$ .
- 4 Bob wählt eine Zahl  $i$ .

Alice gewinnt, wenn  $uv^iwx^iy \in L$ .

Bob gewinnt, wenn  $uv^iwx^iy \notin L$ .

Falls  $L$  kontextfrei ist, kann Alice immer gewinnen.

(Gewinnstrategie für Alice)

Falls Bob immer gewinnen kann, dann ist  $L$  nicht kontextfrei.

(Gewinnstrategie für Bob)

## Beispiel

Es sei  $L = \{ a^n b^n c^n \mid n > 0 \}$ .

- 1 Alice wählt eine Zahl  $n$ .
- 2 Bob wählt  $z = a^n b^n c^n$ .
- 3 Alice wählt  $u, v, w, x, y \in \{a, b, c\}^*$  mit  $z = u v w x y$ ,  
 $|v w x| \leq n$ ,  $|v x| > 0$ .

Dann enthält  $v x$  kein  $a$  oder kein  $c$ .

- 4 Bob wählt  $i = 2$ .

Bob hat gewonnen:

$u v^2 w x^2 y \notin L$ , da es zu wenig  $a$  oder  $c$  enthält

Also ist  $L$  nicht kontextfrei.

## Beispiel

Es sei  $L = \{ w w \mid w \in \{0, 1\}^* \}$ .

- 1 Alice wählt eine Zahl  $n$ .
- 2 Bob wählt  $z = 0^n 1^n 0^n 1^n$ .
- 3 Alice wählt  $u, v, w, x, y \in \{0, 1\}^*$  mit  $z = u v w x y$ ,  
 $|v w x| \leq n$ ,  $|v x| > 0$ .

Dann ist  $v x = 0^m 1^k$  oder  $v x = 1^m 0^k$ ,  
wobei  $m > 0$  oder  $k > 0$ .

- 4 Bob wählt  $i = 0$ .

Bob hat gewonnen:

$u w y \notin L$  (durch Fallunterscheidung leicht zu sehen)

Also ist  $L$  nicht kontextfrei.

## Beispiel

Es sei  $L = \{ w w^R \mid w \in \{0, 1\}^* \}$ .

- 1 Alice wählt die Zahl  $n = 2$ .
- 2 Bob wählt ein  $z \in L$  mit  $|z| \geq 2$ .

Dann ist  $z = t a a t^R$  für ein  $t \in \Sigma^*$  und ein  $a \in \Sigma$ .

- 3 Alice wählt  $u = t$ ,  $v = a$ ,  $w = \epsilon$ ,  $x = a$ ,  $y = t^R$ .

Dann ist  $|v w x| = 2$ ,  $|v x| = 2 > 0$ .

- 4 Bob wählt ein  $i \geq 0$ .

Alice hat gewonnen:

$$u v^i w x^i y \in L$$

Also erfüllt  $L$  das Pumping Lemma  
(klar, denn  $L$  ist offensichtlich kontextfrei).