# Übersicht

Die Chomsky-Hierarchie besteht aus vier Stufen:

- Chomsky-0: Rekursiv aufzählbare Sprachen

  Unbeschränkte Grammatiken: $u \longrightarrow v$, $u$ enthält Nonterminal

  Bsp: $abAc \longrightarrow Bcb$

- Chomsky-1: Kontextsensitive Sprachen

  Monotone Grammatiken:

  - $u \longrightarrow v$ mit $|u| \leq |v|$, $u$ enthält Nonterminal
  - $S \longrightarrow \epsilon$ falls $S$ nirgendwo rechts

  Bsp: $abAc \longrightarrow abBCc$, $aBCD \longrightarrow abCaAbCD$

- Chomsky-2: Kontextfreie Sprachen
  Kontextfreie Grammatiken: $A \longrightarrow BC$, $B \longrightarrow bCaAb$

- Chomsky-3: Reguläre Sprachen
  Linkslineare Grammatiken: $A \longrightarrow a$, $B \longrightarrow bC$

### Definition 4.0.1

*Eine linkslineare Grammatik ist ein kontextfreie Grammatik $G = (N, T, P, S)$ mit Produktionen der Form $A \to aB$, $C \to b$ und $D \to \epsilon$ mit $A, B, C, D \in N$ und $a, b \in T$.*

### Satz 4.0.2

*Linkslineare Grammatiken erzeugen genau die regulären Sprachen.*

### Lemma 4.0.3

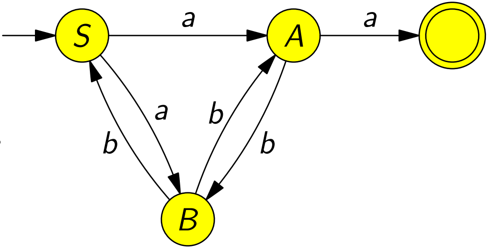
*Jede Linkslineare Grammatik erzeugt eine reguläre Sprache.*

### Beweis.

Konstruiere den Kellerautomaten zu einer linkslinearen Grammatik.

Der Keller kann nie mehr als ein Symbol enthalten.
Ein endlicher Automat kann also den Kellerautomaten simulieren. $\square$

# Beispiel




$$S \rightarrow aA \mid aB$$
$$A \rightarrow a \mid bB$$
$$B \rightarrow bA \mid bS$$

## Lemma 4.0.4

*Jede reguläre Sprache wird durch eine rechtslineare Grammatik erzeugt.*

## Beweis.

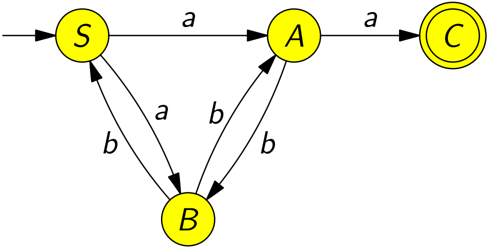
Es sei $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein NFA.
Definiere die Grammatik $G = (Q, \Sigma, P, q_0)$ mit den Produktionen

1. $q \rightarrow a\, p$ falls $p \in \delta(q, a)$ und
2. $q \rightarrow \epsilon$ falls $q \in F$.

Mit Induktion über $|w|$ bzw. über die Länge von $\overset{*}{\Rightarrow}$:

$p \in \hat{\delta}(q, w)$ gdw. $q \overset{*}{\Rightarrow} w\, p$. □

# Beispiel




$$S \longrightarrow aA \mid aB$$
$$A \longrightarrow aC \mid bB$$
$$B \longrightarrow bA \mid bS$$
$$C \longrightarrow \epsilon$$

Kontextsensitive Sprachen sind eine echte Obermenge der kontextfreien Sprachen:

$L = \{\, \$w\$w\$ \mid w \in \{a, b\}^* \,\}$

$$\begin{aligned}
S &\rightarrow LMR \\
M &\rightarrow AM\bar{A} \mid BM\bar{B} \mid \$ \\
\bar{A}A &\rightarrow A\bar{A}, \quad \bar{A}B \rightarrow B\bar{A} \\
\bar{B}A &\rightarrow A\bar{B}, \quad \bar{B}B \rightarrow B\bar{B} \\
\bar{A}R &\rightarrow AR, \quad \bar{B}R \rightarrow BR \\
L &\rightarrow \$ \\
R &\rightarrow \$ \\
A &\rightarrow a \\
B &\rightarrow b
\end{aligned}$$

## Satz 4.0.5

*Das Leerheitsproblem für kontextsensitive Sprachen ist nicht entscheidbar.*

## Beweis.

$$I := \left\{ \boxed{\begin{matrix} u_1 \\ \\ v_1 \end{matrix}}, \boxed{\begin{matrix} u_2 \\ \\ v_2 \end{matrix}}, \ldots, \boxed{\begin{matrix} u_n \\ \\ v_n \end{matrix}} \right\}$$

$$\begin{array}{rcl}
S & \to & \$ A \$ \\
A & \to & u_1\, B\, v_1^R \mid \cdots \mid u_n\, B\, v_n^R \\
B & \to & u_1\, B\, v_1^R \mid \cdots \mid u_n\, B\, v_n^R \mid D \\
a\, D\, a & \to & C\, D\, C \\
b\, D\, b & \to & C\, D\, C \\
\$\, D\, \$ & \to & c\, c\, c
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcl}
a\, C & \to & C\, a \\
b\, C & \to & C\, b \\
C\, a & \to & a\, C \\
C\, b & \to & b\, C \\
\$\, C & \to & c\, \$ \\
C\, \$ & \to & \$\, c
\end{array}$$

Sprache ist leer gdw. $I$ keine Lösung hat. □

### Satz 4.0.6

*Das Wortproblem für kontextsensitive Sprachen ist entscheidbar.*

### Beweis.

Es sei $G$ eine kontextsensitive Grammatik und $w$ ein Wort.

Wende Regeln rekursiv rückwärts auf alle möglichen Arten an.

Wir erhalten so alle $\alpha$ mit $\alpha \stackrel{*}{\Rightarrow} w$.

Ist das Startsymbol darunter?

Terminierung: $|\alpha| \leq |w|$ falls $\alpha \stackrel{*}{\Rightarrow} w$. $\square$

## Satz 4.0.7

*Das Wortproblem für Chomsky-0-Sprachen ist nicht entscheidbar.*

## Beweis.

$$I := \left\{ \boxed{\begin{array}{c} u_1 \\ \\ v_1 \end{array}}, \boxed{\begin{array}{c} u_2 \\ \\ v_2 \end{array}}, \dots, \boxed{\begin{array}{c} u_n \\ \\ v_n \end{array}} \right\}$$

$$\begin{aligned} S &\to u_1 M v_1^R \mid \cdots \mid u_n M v_n^R \\ M &\to u_1 M v_1^R \mid \cdots \mid u_n M v_n^R \mid D \\ 0D0 &\to D \\ 1D1 &\to D \\ D &\to \epsilon \end{aligned}$$

Sprache enthält $\epsilon$ gdw. $I$ lösbar. □