μ–recursive Functions

1. $\text{null}_n(k_1, \ldots, k_n) = 0$

2. $\text{succ}(k) = k + 1$

3. $\text{proj}_{n,i}(k_1, \ldots, k_n) = k_i$

4. $g(k_1, \ldots, k_n) = f(f_1(k_1, \ldots, k_n), \ldots, f_m(k_1, \ldots, k_n))$

5. $$\begin{array}{rcl} h(k_1, \ldots, k_n, 0) & = & f(k_1, \ldots, k_n) \\ h(k_1, \ldots, k_n, k+1) & = & g(k_1, \ldots, k_n, k, h(k_1, \ldots, k_n, k)) \end{array}$$

6. $g(k_1, \ldots, k_n) = k$ iff $f(k_1, \ldots, k_n, k) = 0$ and
   for all $0 \leq k' < k$,
   $f(k_1, \ldots, k_n, k')$ is defined and
   $f(k_1, \ldots, k_n, k') > 0$

Example plus

$$
\begin{aligned}
\mathsf{f}(x,y,z) &= \mathsf{succ}(\mathsf{proj}_{3,3}(x,y,z)) \\
\mathsf{plus}(x,0) &= \mathsf{proj}_{1,1}(x) \\
\mathsf{plus}(x,y+1) &= \mathsf{f}(x,y,\mathsf{plus}(x,y))
\end{aligned}
$$

Example div

$\mathsf{div}(x,y) = z$ iff $\mathsf{i}(x,y,z) = 0$ and
for all $0 \leq z' < z$, $\mathsf{i}(x,y,z')$ is defined
and $\mathsf{i}(x,y,z') > 0$

Here, $\mathsf{i}(x,y,z) = x - y \cdot z$, i.e.,

$$
\begin{aligned}
\mathsf{i}(x,y,z) &= \mathsf{minus}(\mathsf{proj}_{3,1}(x,y,z), \mathsf{j}(x,y,z)) \\
\mathsf{j}(x,y,z) &= \mathsf{times}(\mathsf{proj}_{3,2}(x,y,z), \mathsf{proj}_{3,3}(x,y,z))
\end{aligned}
$$