

- **Ersetzungsrelation:** $s \rightarrow_{\mathcal{E}} t$ gdw. $s|_{\pi} = t_1\sigma$ und $t = s[t_2\sigma]_{\pi}$
für $t_1 \equiv t_2 \in \mathcal{E}$
- **Beweisrelation:** $s \leftrightarrow_{\mathcal{E}}^* t$ gdw. $s = s_0 \leftrightarrow_{\mathcal{E}} s_1 \leftrightarrow_{\mathcal{E}} \dots \leftrightarrow_{\mathcal{E}} s_n = t$
- **Herleitbarkeit:** $\mathcal{E} \vdash s \equiv t$ gdw. $s \leftrightarrow_{\mathcal{E}}^* t$

Axiome:

$$\text{plus}(\mathcal{O}, y) \equiv y$$

$$\text{plus}(\text{succ}(x), y) \equiv \text{succ}(\text{plus}(x, y))$$

$\frac{\text{plus}(\text{succ}^2(\mathcal{O}), x)}{\text{succ}(\text{plus}(\text{succ}(\mathcal{O}), x))}$	$\text{plus}(\text{succ}(x), y) \equiv \text{succ}(\text{plus}(x, y))$	$\sigma = \{x/\text{succ}(\mathcal{O}), y/x\}$
$\frac{\text{succ}^2(\text{plus}(\mathcal{O}, x))}{\text{succ}(\text{succ}(x))}$	$\text{plus}(\text{succ}(x), y) \equiv \text{succ}(\text{plus}(x, y))$	$\sigma = \{x/\mathcal{O}, y/x\}$
$\frac{\text{succ}(\text{succ}(x))}{\text{succ}(\text{plus}(\mathcal{O}, \text{succ}(x)))}$	$\text{plus}(\mathcal{O}, y) \equiv y$	$\sigma = \{y/x\}$
$\frac{\text{plus}(\text{succ}(\mathcal{O}), \text{succ}(x))}{\text{plus}(\text{succ}(\mathcal{O}), \text{succ}(x))}$	$y \equiv \text{plus}(\mathcal{O}, y)$	$\sigma = \{y/\text{succ}(x)\}$
	$\text{succ}(\text{plus}(x, y)) \equiv \text{plus}(\text{succ}(x), y)$	$\sigma = \{x/\mathcal{O}, y/\text{succ}(x)\}$

$\equiv_{\mathcal{E}}$ und $\leftrightarrow_{\mathcal{E}}^*$ sind *stabile* und *monotone Kongruenzrelationen*