RHEINISCH-
WESTFÄLISCHE
TECHNISCHE
HOCHSCHULE
AACHEN

LEHR- UND FORSCHUNGSGEBIET INFORMATIK II

RWTH Aachen · D-52056 Aachen · GERMANY
http://www-i2.informatik.rwth-aachen.de/lufgi2

Prof. Dr. Jürgen Giesl
René Thiemann

Übungen *Termersetzungssysteme* – Blatt 10

Abgabe am Mittwoch, den 7.7.2004, zu Beginn der Übung.

Aufgabe 1 (4+2 Punkte)

Sei $\succ$ eine irreflexive und transitive Relation auf einer Menge T und seien $M, N \in \mathcal{M}(T)$. Zeigen Sie, dass $M \succ_{mul} N$ gdw.

- $M \neq N$ und
- für alle $n \in N \setminus M$ gibt es ein $m \in M \setminus N$, so dass $m \succ n$.

Aufgabe 2 (7,5 Punkte)

Beweisen Sie - wenn möglich - für jedes der folgenden TESe die Terminierung mit RPOS. Zeigen Sie für die TESe, bei denen der Terminierungsbeweis mit RPOS scheitert, dass die Terminierung mit keiner Simplifikationsordnung bewiesen werden kann.

a)

$$\begin{aligned}
\mathsf{minus}(x, \mathsf{0}) &\to x \\
\mathsf{minus}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{minus}(x, y) \\
\mathsf{quot}(\mathsf{0}, \mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{0} \\
\mathsf{quot}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{s}(\mathsf{quot}(\mathsf{minus}(x, y), \mathsf{s}(y)))
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\mathsf{not}(\mathsf{not}(x)) &\to x \\
\mathsf{not}(\mathsf{or}(x, y)) &\to \mathsf{and}(\mathsf{not}(x), \mathsf{not}(y)) \\
\mathsf{not}(\mathsf{and}(x, y)) &\to \mathsf{or}(\mathsf{not}(x), \mathsf{not}(y)) \\
\mathsf{and}(x, \mathsf{or}(y, z)) &\to \mathsf{or}(\mathsf{and}(x, y), \mathsf{and}(x, z)) \\
\mathsf{and}(\mathsf{or}(y, z), x) &\to \mathsf{or}(\mathsf{and}(x, y), \mathsf{and}(x, z))
\end{aligned}$$

c)

$$\mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{b},x) \;\to\; \mathsf{f}(x,x,x)$$

d)

$$\begin{aligned}
\mathsf{tree2list}(\mathsf{empty}) &\to \mathsf{nil}\\
\mathsf{tree2list}(\mathsf{leaf}(x)) &\to \mathsf{cons}(x,\mathsf{nil})\\
\mathsf{tree2list}(\mathsf{node}(x,\mathsf{empty})) &\to \mathsf{tree2list}(x)\\
\mathsf{tree2list}(\mathsf{node}(x,\mathsf{node}(y,z))) &\to \mathsf{tree2list}(\mathsf{node}(\mathsf{node}(x,y),z))\\
\mathsf{tree2list}(\mathsf{node}(x,\mathsf{leaf}(y))) &\to \mathsf{cons}(y,\mathsf{tree2list}(x))
\end{aligned}$$

e)

$$\mathsf{f}(\mathsf{s}(w),\mathsf{g}(\mathsf{s}(x),y,z)) \;\to\; \mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{h}(w,w),\mathsf{g}(z,\mathsf{s}(x),y)),\mathsf{g}(y,x,x))$$

Aufgabe 3 **(4+1 Punkte)**

Eine weitere nützliche Klasse von Reduktionsordnungen für den automatischen Terminierungsbeweis ist die Klasse der Polynomordnungen. Für eine Polynomordnung benötigt man zuerst eine Polynominterpretation $\mathcal{P}$, die jedem n-stelligen Funktionssymbol f ein Polynom $\mathcal{P}(f)$ über den Variablen $x_1,\ldots,x_n$ zuordnet. Betrachten wir die ersten beiden Regeln des TES aus Aufgabe 2a), dann können wir z.B. $\mathcal{P}(\mathsf{minus}) = x_1 + x_2 + 1, \mathcal{P}(\mathsf{s}) = x_1 + 1$ und $\mathcal{P}(\mathsf{0}) = 0$ wählen. Jede Interpretation läßt sich leicht auf Terme erweitern:

- $\mathcal{P}(x) = x$ für jede Variable x.
- $\mathcal{P}(f(t_1,\ldots,t_n)) = \mathcal{P}(f)\{x_1/\mathcal{P}(t_1),\ldots,x_n/\mathcal{P}(t_n)\}$

Die zu $\mathcal{P}$ gehörige Polynomordnung $\succ_{\mathcal{P}}$ ist dann definiert als

$s \succ_{\mathcal{P}} t$ gdw. $\mathcal{P}(s) > \mathcal{P}(t)$ für alle Belegungen der Variablen mit natürlichen Zahlen gilt. Hierbei bezeichnet $>$ die normale $>$-Relation auf $\mathbb{N}$.

Im Beispiel gilt $\mathcal{P}(\mathsf{minus}(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y))) = (x_1 + x_2 + 1)\{x_1/\mathcal{P}(\mathsf{s}(x)), x_2/\mathcal{P}(\mathsf{s}(y))\} = \mathcal{P}(\mathsf{s}(x)) + \mathcal{P}(\mathsf{s}(y)) + 1 = (x_1+1)\{x_1/x\} + (x_1+1)\{x_1/y\} + 1 = (x+1)+(y+1)+1 = x+y+3$ und analog $\mathcal{P}(\mathsf{minus}(x,y)) = x+y+1$. Da für alle $x, y \in \mathbb{N}$ offensichtlich der

Zusammenhang $x+y+3 > x+y+1$ gilt, haben wir $\mathsf{minus}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \succ_{\mathcal{P}} \mathsf{minus}(x, y)$ gezeigt. In gleicher Weise läßt sich auch $\mathsf{minus}(x, \mathsf{0}) \succ_{\mathcal{P}} x$ zeigen (man bekommt die Ungleichung $x + 1 > x$).

Die ausmultiplizierten Polynome $\mathcal{P}(f) = c_1 x_1^{e_{1,1}} \ldots x_n^{e_{1,n}} + \ldots + c_k x_1^{e_{k,1}} \ldots x_n^{e_{k,n}}$ sind dabei wie folgt eingeschränkt, um die notwendigen Eigenschaften wie Fundiertheit und Monotonie von $\succ_{\mathcal{P}}$ zu garantieren:

- alle Koeffizienten c_i sind natürliche Zahlen
- für jede Variable x_i ist der Koeffizient c_j im Monom $c_j x_1^0 \ldots x_i^1 \ldots x_n^0$ größer als Null.

a) Beweisen Sie die Terminierung der folgenden TESe mit einer geeigneten Polynomordnung.

$$\begin{aligned}
\mathsf{plus}(\mathsf{s}(x), y) &\to \mathsf{s}(\mathsf{plus}(x, y)) \\
\mathsf{plus}(\mathsf{0}, y) &\to y
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathsf{average}(\mathsf{s}(x), y) &\to \mathsf{average}(x, \mathsf{s}(y)) \\
\mathsf{average}(x, \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(y)))) &\to \mathsf{s}(\mathsf{average}(\mathsf{s}(x), y)) \\
\mathsf{average}(\mathsf{0}, \mathsf{0}) &\to \mathsf{0} \\
\mathsf{average}(\mathsf{0}, \mathsf{s}(\mathsf{0})) &\to \mathsf{0} \\
\mathsf{average}(\mathsf{0}, \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{0}))) &\to \mathsf{s}(\mathsf{0})
\end{aligned}$$

b) Zeigen Sie, dass die Regeln des average-TES nicht mit RPOS orientiert werden können.