

Prof. Dr. Jürgen Giesl  
René Thiemann

## Übungen *Termersetzungssysteme* – Blatt 3

Abgabe am Mittwoch, den 12.5.2004, zu Beginn der Übung.

### Aufgabe 1 (2+2 Punkte)

Beweisen Sie die folgenden Aussagen für beliebige Terme  $s, t, u$  und beliebige Positionen  $\pi \in \text{Occ}(s), \tau \in \text{Occ}(t)$ .

a)  $(s[t]_{\pi})|_{\pi\tau} = t|_{\tau}$

b)  $(s[t]_{\pi})[u]_{\pi\tau} = s[t[u]_{\tau}]_{\pi}$

### Aufgabe 2 (2+2+2 Punkte)

Sei  $\mathcal{E}$  ein beliebiges Termgleichungssystem.

- Zeigen Sie, dass  $\rightarrow_{\mathcal{E}}$  monoton ist. Nutzen Sie hierzu die Ergebnisse aus Aufgabe 1.
- Zeigen Sie, dass jede monotone Äquivalenzrelation  $\rightarrow_{\subseteq} \mathcal{T}(\Sigma, \mathcal{V}) \times \mathcal{T}(\Sigma, \mathcal{V})$  eine Kongruenzrelation ist.
- Zeigen Sie, dass  $\leftrightarrow_{\mathcal{E}}^*$  eine Kongruenzrelation ist.

### Aufgabe 3 (2+4 Punkte)

Betrachten Sie die folgenden Gleichungen für Boolesche Ausdrücke. Zur Erleichterung der Lesbarkeit werden die üblichen Infixschreibweisen ( $x \vee y$  statt  $\text{or}(x, y)$ , analog für  $x \wedge y$ , und  $\neg x$  statt  $\text{not}(x)$ ) und Präzedenzen ( $\neg$  bindet stärker als  $\vee$  und  $\wedge$ ) genutzt.

Beispielsweise steht  $\neg x \vee \neg y$  für  $\text{or}(\text{not}(x), \text{not}(y))$ .

$$\neg\neg x \equiv x \quad (1)$$

$$\neg(x \wedge y) \equiv \neg x \vee \neg y \quad (2)$$

$$\neg(x \vee y) \equiv \neg x \wedge \neg y \quad (3)$$

$$x \wedge (y \vee z) \equiv (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \quad (4)$$

a) Zeigen Sie, dass (2) eine Konsequenz von (1) und (3) ist, indem Sie  $\neg(x \wedge y) \leftrightarrow_{\{(1),(3)\}}^* \neg x \vee \neg y$  herleiten.

b) Leiten Sie  $x \vee (y \wedge z) \leftrightarrow_{\{(1),(2),(3),(4)\}}^* (x \vee y) \wedge (x \vee z)$  her.

Unterstreichen Sie bei jedem  $\leftrightarrow_{\mathcal{E}}$ -Schritt jeweils den ersetzten Teilterm und geben Sie die Nummer der benutzten Gleichung an.

Hinweis: Bei Aufgabenteil b) müssen zumindest die Regeln (1), (4) und eine der Regeln (2) oder (3) benutzt werden. Ansonsten lässt sich keine Herleitung finden.