Termersetzungssysteme
Scheinklausur, 9. Februar 2007

Prof. Dr. Jürgen Giesl
Peter Schneider-Kamp, Stephan Swiderski, René Thiemann

Vorname: ______________________

Nachname: ______________________

Matrikelnummer: ______________________

E-Mail-Addresse: ______________________

Studiengang (bitte genau einen ankreuzen):

- ○ Informatik Diplom
- ○ Mathematik Diplom
- ○ Master of SSE
- ○ Erasmus
- ○ Sonstige: ______________________

- Schreiben Sie auf jedes Blatt **Vorname**, **Nachname** und **Matrikelnummer**.
- Alle Aufgaben müssen **ohne Hilfsmittel** (z.B. Mitschriften) gelöst werden.
- Geben Sie Ihre Antworten bitte in lesbarer und verständlicher Form an. Schreiben Sie bitte **nicht mit roten Stiften oder Bleistiften**. Was nicht bewertet werden soll, kennzeichnen Sie bitte durch **Durchstreichen**.
- Bitte beantworten Sie die Aufgaben auf den **Aufgabenblättern**. Benutzen Sie ggf. auch die Rückseiten der **zur jeweiligen Aufgabe gehörenden** Aufgabenblätter. Antworten auf anderen Blättern können nur berücksichtigt werden, wenn **Name, Matrikelnummer und Aufgabennummer** deutlich darauf erkennbar sind.
- Werden Täuschungsversuche beobachtet, so wird die Klausur mit **nicht bestanden** bewertet.
- Entfernen Sie bitte nicht die Klammerung der Klausur.
- Geben Sie bitte am Ende der Klausur **alle Blätter inklusive der Aufgabenblätter** ab.

	Anzahl Punkte	**Erreichte Punkte**
Aufgabe 1	**5**	
Aufgabe 2	**4**	
Aufgabe 3	**4**	
Aufgabe 4	**4**	
Aufgabe 5	**4**	
Aufgabe 6	**5**	
Total	**26**	
Zusatzaufgabe	**5**	
Note	**-**	

Vorname	Nachname	Matrikelnummer

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Bewerten Sie die folgenden Aussagen. Für jede richtige Antwort gibt es einen Punkt, für jede falsche wird ein halber Punkt abgezogen. Die minimale Punktzahl in dieser Aufgabe beträgt 0.

	Stimmt	Stimmt nicht
Wenn $\mathcal{R}$ stark konfluent ist, dann ist $\mathcal{R}$ auch lokal konfluent.	x	
Das Wortproblem $u \equiv_{\mathcal{E}} v$ ist entscheidbar, wenn es zu $\mathcal{E}$ ein konvergentes und äquivalentes Termersetzungssystem $\mathcal{R}$ gibt.	x	
Die Terminierung von Termersetzungssystemen ohne Variablen auf linken Seiten ist entscheidbar.	x	
Die Einbettungsordnung ist monoton, stabil, reflexiv und transitiv.		x
Die Teiltermrelation $\trianglerighteq$ ist monoton, stabil, reflexiv und transitiv.		x

Vorname	Nachname	Matrikelnummer

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Gegeben sei das folgende Gleichungssystem $\mathcal{E}$:

$$\begin{aligned} \mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{b})) &\equiv \mathsf{g}(\mathsf{a}) \\ \mathsf{b} &\equiv \mathsf{f}(\mathsf{b}) \\ \mathsf{g}(\mathsf{f}(\mathsf{b})) &\equiv \mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{b})) \end{aligned}$$

Untersuchen Sie, ob $\mathsf{b} \equiv_{\mathcal{E}} \mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{g}(\mathsf{a})))$ gilt.

Bilde Menge L_0 der Äquivalenzklassen über Terme aus $\mathcal{E}$ und der Anfrage:

$$L_0 := \{\{\mathsf{a}\}, \{\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{b})), \mathsf{g}(\mathsf{a})\},\ \{\mathsf{b}, \mathsf{f}(\mathsf{b})\}\ , \{\mathsf{g}(\mathsf{b})\},\ \{\mathsf{g}(\mathsf{f}(\mathsf{b})), \mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{b}))\}\ \{\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{g}(\mathsf{a})))\}\}$$

wende nun den Algorithmus $\mathsf{KONGRUENZABSCHLUSS}$ an:

$$K_1 := L_0 \cup \{\{\mathsf{f}(\mathsf{b}), \mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{b}))\},\ \{\mathsf{g}(\mathsf{b}), \mathsf{g}(\mathsf{f}(\mathsf{b}))\}, \dots\}$$

$$L_1 := \{\{\mathsf{a}\}, \{\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{b})), \mathsf{g}(\mathsf{a})\},\ \{\mathsf{b}, \mathsf{g}(\mathsf{b}), \mathsf{f}(\mathsf{b}), \mathsf{g}(\mathsf{f}(\mathsf{b})), \mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{b}))\},\ \{\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{g}(\mathsf{a})))\}\}$$

$$K_2 := L_1 \cup \{\{\mathsf{f}(\mathsf{b}), \mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{b}))\}, \dots\}$$

$$L_2 := \{\{\mathsf{a}\}, \{\mathsf{b}, \mathsf{g}(\mathsf{b}), \mathsf{g}(\mathsf{a}), \mathsf{g}(\mathsf{f}(\mathsf{b})), \mathsf{f}(\mathsf{b}), \mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{b})), \mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{b}))\},\ \{\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{g}(\mathsf{a})))\}\}$$

$$K_3 := L_2 \cup \{\{\mathsf{g}(\mathsf{b}), \mathsf{g}(\mathsf{g}(\mathsf{a}))\}, \dots\}$$

$$L_3 := \{\{\mathsf{a}\}, \{\mathsf{b}, \mathsf{g}(\mathsf{b}), \mathsf{g}(\mathsf{a}), \mathsf{g}(\mathsf{g}(\mathsf{a})), \mathsf{g}(\mathsf{f}(\mathsf{b})), \mathsf{f}(\mathsf{b}), \mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{b})), \mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{b})), \dots\},\ \{\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{g}(\mathsf{a})))\}\}$$

$$K_4 := L_3 \cup \{\{\mathsf{f}(\mathsf{b}), \mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{g}(\mathsf{a})))\}, \dots\}$$

$$L_4 := \{\{\mathsf{a}\}, \{\mathsf{b}, \mathsf{g}(\mathsf{b}), \mathsf{g}(\mathsf{a}), \mathsf{g}(\mathsf{g}(\mathsf{a})), \mathsf{g}(\mathsf{f}(\mathsf{b})), \mathsf{f}(\mathsf{b}), \mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{b})), \mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{b})), \mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{g}(\mathsf{a}))), \dots\}\}$$

Eine der Äquivalenzklassen aus L_4 enthält b und $\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{g}(\mathsf{a})))$ und damit gilt $\mathsf{b} \equiv_{\mathcal{E}} \mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{g}(\mathsf{a})))$.

Vorname	Nachname	Matrikelnummer

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Gegeben sei das folgende TES $\mathcal{R}$, welches eine Baumstruktur in eine Listenstruktur überführt:

$$\begin{aligned} \mathsf{flatten}(\mathsf{nil}) &\to \mathsf{nil} \\ \mathsf{flatten}(\mathsf{cons}(\mathsf{nil}, x)) &\to \mathsf{cons}(\mathsf{nil}, \mathsf{flatten}(x)) \\ \mathsf{flatten}(\mathsf{cons}(\mathsf{cons}(x, y), z)) &\to \mathsf{flatten}(\mathsf{cons}(x, \mathsf{cons}(y, z))) \end{aligned}$$

Sei $B = \mathcal{T}(\{\mathsf{nil}, \mathsf{cons}\})$, d.h., $B = \{\mathsf{nil}, \mathsf{cons}(\mathsf{nil}, \mathsf{nil}), \mathsf{cons}(\mathsf{cons}(\mathsf{nil}, \mathsf{nil}), \mathsf{nil}), \dots\}$. Zeigen Sie mittels noetherscher Induktion, dass für jeden Term $t \in B$ der Term $\mathsf{flatten}(t)$ zu einer Normalform aus B reduziert werden kann, d.h., dass $\mathsf{flatten}(t) \to_{\mathcal{R}}^* t' \in B$. Benutzen Sie dazu eine geeignete Induktionsrelation $\succ$.

Wir benutzen noethersche Induktion mit einer beliebigen LPO $\succ$ als Induktionsrelation:

Fall 1: $t = \mathsf{nil}$:

$$\mathsf{flatten}(t) = \mathsf{flatten}(\mathsf{nil}) \to_{\mathcal{R}} \mathsf{nil} \in B$$

Fall 2: $t = \mathsf{cons}(\mathsf{nil}, s)$:

$$\mathsf{flatten}(t) = \mathsf{flatten}(\mathsf{cons}(\mathsf{nil}, s)) \to_{\mathcal{R}} \mathsf{cons}(\mathsf{nil}, \mathsf{flatten}(s))$$

Wegen $\mathsf{cons}(\mathsf{nil}, s) \succ s$ gilt die Induktionshypothese und damit:

$$\mathsf{flatten}(t) \to_{\mathcal{R}} \mathsf{cons}(\mathsf{nil}, \mathsf{flatten}(s)) \to_{\mathcal{R}}^* \mathsf{cons}(\mathsf{nil}, t')$$

Aus $t' \in B$ folgt $\mathsf{cons}(\mathsf{nil}, t') \in B$.

Fall 3: $t = \mathsf{cons}(\mathsf{cons}(s_1, s_2), s_3)$:

$$\mathsf{flatten}(t) = \mathsf{flatten}(\mathsf{cons}(\mathsf{cons}(s_1, s_2), s_3)) \to_{\mathcal{R}} \mathsf{flatten}(\mathsf{cons}(s_1, \mathsf{cons}(s_2, s_3)))$$

Wegen $\mathsf{cons}(\mathsf{cons}(s_1, s_2), s_3) \succ \mathsf{cons}(s_1, \mathsf{cons}(s_2, s_3))$ gilt die Induktionshypothese und damit:

$$\mathsf{flatten}(t) \to_{\mathcal{R}} \mathsf{flatten}(\mathsf{cons}(s_1, \mathsf{cons}(s_2, s_3))) \to_{\mathcal{R}}^* t' \in B$$

Vorname	Nachname	Matrikelnummer

Aufgabe 4 (3+1 Punkte)

Gegeben sei das folgende TES $\mathcal{R}$, welches die Anzahl der Knoten in einer Baumstruktur berechnet:

$$
\begin{aligned}
\mathsf{add}(x, \mathsf{0}, \mathsf{0}) &\to x && (1)\\
\mathsf{add}(x, \mathsf{s}(y), z) &\to \mathsf{add}(\mathsf{s}(x), y, z) && (2)\\
\mathsf{add}(x, y, \mathsf{s}(z)) &\to \mathsf{add}(x, \mathsf{s}(y), z) && (3)\\
\mathsf{size}(\mathsf{nil}) &\to \mathsf{0} && (4)\\
\mathsf{size}(\mathsf{cons}(x, y)) &\to \mathsf{add}(\mathsf{s}(\mathsf{0}), \mathsf{size}(y), \mathsf{size}(x)) && (5)
\end{aligned}
$$

a) Zeigen Sie die Terminierung von $\mathcal{R}$ mit LPO, LPOS, RPO oder RPOS. Geben Sie die Präzedenz und gegebenenfalls den Status für die verwendete Ordnung an. Zeigen Sie detailliert, wie die Terminierung für die Regeln (2) und (5) gezeigt wird.

Wir verwenden eine LPOS mit Präzedenz $\mathsf{size} \sqsupset \mathsf{add} \sqsupset \mathsf{s} \sqsupset \mathsf{0}$ und Status $\pi_{\mathsf{add}} = \langle 3, 2, 1 \rangle$. Damit ergibt sich für Regel (2):

$$
\frac{\dfrac{}{z \sim z} \qquad \dfrac{\dfrac{}{y \sim y}}{\mathsf{s}(y) \succ y}\,(1) \qquad \dfrac{\dfrac{}{x \sim x}}{\mathsf{add}(x, \mathsf{s}(y), z) \succ x}\,(1)}{\mathsf{add}(x, \mathsf{s}(y), z) \succ \mathsf{add}(\mathsf{s}(x), y, z)}\,(3)
$$

Für Regel (5) erhalten wir:

$$
\frac{\dfrac{\dfrac{}{\mathsf{size}(\mathsf{cons}(x, y)) \succ \mathsf{0}}\,(2)}{\mathsf{size}(\mathsf{cons}(x, y)) \succ \mathsf{s}(\mathsf{0})}\,(2) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{y \sim y}}{\mathsf{cons}(x, y) \succ y}\,(1)}{\mathsf{size}(\mathsf{cons}(x, y)) \succ \mathsf{size}(y)}\,(3) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{x \sim x}}{\mathsf{cons}(x, y) \succ x}\,(1)}{\mathsf{size}(\mathsf{cons}(x, y)) \succ \mathsf{size}(x)}\,(3)}{\mathsf{size}(\mathsf{cons}(x, y)) \succ \mathsf{add}(\mathsf{s}(\mathsf{0}), \mathsf{size}(y), \mathsf{size}(x))}\,(2)
$$

b) Im Folgenden bezeichne z.B. $\mathcal{R}_{LPO}$ die Menge aller Termersetzungssysteme $\mathcal{R}$, für die es eine LPO $\succ$ gibt, so dass $l \succ r$ für alle Regeln $l \to r \in \mathcal{R}$ gilt. Welche Inklusionsbeziehungen gelten zwischen $\mathcal{R}_{EMB}$, $\mathcal{R}_{LPO}$, $\mathcal{R}_{LPOS}$, $\mathcal{R}_{RPO}$ und $\mathcal{R}_{RPOS}$? Und welche gelten nicht?

Die einzigen Inklusionsbeziehungen die gelten sind die Folgenden:

$$\mathcal{R}_{EMB} \subseteq \mathcal{R}_{LPO} \subseteq \mathcal{R}_{LPOS} \subseteq \mathcal{R}_{RPOS}$$

$$\mathcal{R}_{EMB} \subseteq \mathcal{R}_{RPO} \subseteq \mathcal{R}_{RPOS}$$

Vorname	Nachname	Matrikelnummer

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Erzeugen Sie aus dem folgenden Termgleichungssystem $\mathcal{E}$ ein konvergentes TES mit der einfachen Vervollständigung (BASIC_COMPLETION). Nutzen Sie als Reduktionsordnung eine LPO mit Präzedenz $\mathsf{f} \sqsupset \mathsf{e}$.

$$\begin{aligned} \mathsf{f}(x, \mathsf{e}) &\equiv x \\ \mathsf{f}(x, \mathsf{i}(x)) &\equiv \mathsf{e} \\ \mathsf{i}(\mathsf{i}(x)) &\equiv \mathsf{i}(x) \end{aligned}$$

Geben Sie als Zwischenergebnisse jeweils $\mathcal{R}_i$ und $CP(\mathcal{R}_i)$ an. Sie brauchen jedoch nur die Veränderungen angeben ($\mathcal{R}_{i+1} = \mathcal{R}_i \cup \{\dots\}, CP(\mathcal{R}_{i+1}) = CP(\mathcal{R}_i) \cup \{\dots\}$).

- $\mathcal{R}_1 = \left\{ \begin{array}{rcl} \mathsf{f}(x, \mathsf{e}) & \rightarrow & x \\ \mathsf{f}(x, \mathsf{i}(x)) & \rightarrow & \mathsf{e} \\ \mathsf{i}(\mathsf{i}(x)) & \rightarrow & \mathsf{i}(x) \end{array} \right\}$ $CP(\mathcal{R}_1) = \left\{ \begin{array}{rcl} < \mathsf{f}(\mathsf{i}(x), \mathsf{i}(x)) & , & \mathsf{e} > \\ < \mathsf{i}(\mathsf{i}(x)) & , & \mathsf{i}(\mathsf{i}(x)) > \end{array} \right\}$
- $\mathcal{R}_2 = \mathcal{R}_1 \cup \{ \mathsf{f}(\mathsf{i}(x), \mathsf{i}(x)) \rightarrow \mathsf{e} \}$ $CP(\mathcal{R}_2) = CP(\mathcal{R}_1) \cup \left\{ \begin{array}{rcl} < \mathsf{f}(\mathsf{i}(\mathsf{i}(x)), \mathsf{i}(x)) & , & \mathsf{e} > \\ < \mathsf{f}(\mathsf{i}(x), \mathsf{i}(\mathsf{i}(x))) & , & \mathsf{e} > \end{array} \right\}$
- $\mathcal{R}_3 = \mathcal{R}_2 = \mathcal{R}_{\text{final}}$

Vorname	Nachname	Matrikelnummer

Aufgabe 6 (1+4 Punkte)

Gegeben sei nochmal das konvergente Termersetzungssystem $\mathcal{R}$ aus Aufgabe 4.

$$\begin{aligned}
\mathsf{flatten}(\mathsf{nil}) &\to \mathsf{nil}\\
\mathsf{flatten}(\mathsf{cons}(\mathsf{nil}, x)) &\to \mathsf{cons}(\mathsf{nil}, \mathsf{flatten}(x))\\
\mathsf{flatten}(\mathsf{cons}(\mathsf{cons}(x, y), z)) &\to \mathsf{flatten}(\mathsf{cons}(x, \mathsf{cons}(y, z)))
\end{aligned}$$

Sei $\mathcal{E}$ das entsprechende Gleichungssystem (bei dem $\to$ durch $\equiv$ ersetzt wird). Wir sind nun interessiert an der Aussage, ob $\mathsf{flatten}$ idempotent ist, ob also $\mathsf{flatten}(x) \equiv_{\mathcal{E}} \mathsf{flatten}(\mathsf{flatten}(x))$ gilt. Beweisen oder widerlegen Sie:

a) $\mathsf{flatten}(x) \equiv_{\mathcal{E}} \mathsf{flatten}(\mathsf{flatten}(x))$.

b) $\mathsf{flatten}(x) \equiv \mathsf{flatten}(\mathsf{flatten}(x))$ ist induktiv gültig in $\mathcal{E}$.

Um Ihnen Schreibarbeit zu ersparen, dürfen Sie natürlich f anstelle von $\mathsf{flatten}$ usw. schreiben. Zudem können Sie im Verfahren zur Überprüfung der induktiven Gültigkeit mehrere "Reduziere-Gleichung-Schritte" mit einem "Lösche-Schritt" kombinieren.

a) Da $\mathcal{R}$ konvergent und äquivalent zu $\mathcal{E}$ ist, gilt $\mathsf{flatten}(x) \equiv_{\mathcal{E}} \mathsf{flatten}(\mathsf{flatten}(x))$ genau dann, wenn $\mathsf{flatten}(x) \downarrow_{\mathcal{R}} = \mathsf{flatten}(\mathsf{flatten}(x)) \downarrow_{\mathcal{R}}$. Da beide Terme schon in Normalform sind, haben wir $\mathsf{flatten}(x) \not\equiv_{\mathcal{E}} \mathsf{flatten}(\mathsf{flatten}(x))$ bewiesen.

b)

	$\mathcal{E}_i$	$\mathcal{R}_i \setminus \mathcal{R}$
	$\{\mathsf{f}(x) \equiv \mathsf{f}(\mathsf{f}(x))\}$	$\emptyset$
$\vdash_{OR}$	$\emptyset$	$\{\mathsf{f}(\mathsf{f}(x)) \to \mathsf{f}(x)\}$
$\vdash_{G}$	$\{\mathsf{f}(\mathsf{n}) \equiv \mathsf{f}(\mathsf{n})\}$	$\{\mathsf{f}(\mathsf{f}(x)) \to \mathsf{f}(x)\}$
$\vdash_{L}$	$\emptyset$	$\{\mathsf{f}(\mathsf{f}(x)) \to \mathsf{f}(x)\}$
$\vdash_{G}$	$\{\mathsf{f}(\mathsf{c}(\mathsf{n}, x)) \equiv \mathsf{f}(\mathsf{c}(\mathsf{n}, \mathsf{f}(x)))\}$	$\{\mathsf{f}(\mathsf{f}(x)) \to \mathsf{f}(x)\}$
$\vdash_{RG}$	$\{\mathsf{c}(\mathsf{n}, \mathsf{f}(x)) \equiv \mathsf{f}(\mathsf{c}(\mathsf{n}, \mathsf{f}(x)))\}$	$\{\mathsf{f}(\mathsf{f}(x)) \to \mathsf{f}(x)\}$
$\vdash_{RG}$	$\{\mathsf{c}(\mathsf{n}, \mathsf{f}(x)) \equiv \mathsf{c}(\mathsf{n}, \mathsf{f}(\mathsf{f}(x)))\}$	$\{\mathsf{f}(\mathsf{f}(x)) \to \mathsf{f}(x)\}$
$\vdash_{RG}$	$\{\mathsf{c}(\mathsf{n}, \mathsf{f}(x)) \equiv \mathsf{c}(\mathsf{n}, \mathsf{f}(x))\}$	$\{\mathsf{f}(\mathsf{f}(x)) \to \mathsf{f}(x)\}$
$\vdash_{L}$	$\emptyset$	$\{\mathsf{f}(\mathsf{f}(x)) \to \mathsf{f}(x)\}$
$\vdash_{G}$	$\{\mathsf{f}(\mathsf{c}(\mathsf{c}(x, y), z)) \equiv \mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{c}(x, \mathsf{c}(y, z))))\}$	$\{\mathsf{f}(\mathsf{f}(x)) \to \mathsf{f}(x)\}$
$\vdash_{RG}$	$\{\mathsf{f}(\mathsf{c}(x, \mathsf{c}(y, z))) \equiv \mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{c}(x, \mathsf{c}(y, z))))\}$	$\{\mathsf{f}(\mathsf{f}(x)) \to \mathsf{f}(x)\}$
$\vdash_{RG}$	$\{\mathsf{f}(\mathsf{c}(x, \mathsf{c}(y, z))) \equiv \mathsf{f}(\mathsf{c}(x, \mathsf{c}(y, z)))\}$	$\{\mathsf{f}(\mathsf{f}(x)) \to \mathsf{f}(x)\}$
$\vdash_{L}$	$\emptyset$	$\{\mathsf{f}(\mathsf{f}(x)) \to \mathsf{f}(x)\}$
$\vdash_{G}$	$\{\mathsf{f}(\mathsf{f}(x)) \equiv \mathsf{f}(\mathsf{f}(x))\}$	$\{\mathsf{f}(\mathsf{f}(x)) \to \mathsf{f}(x)\}$
$\vdash_{L}$	$\emptyset$	$\{\mathsf{f}(\mathsf{f}(x)) \to \mathsf{f}(x)\}$

Vorname	Nachname	Matrikelnummer

Zusatzaufgabe (5 Punkte)

Beweisen Sie, dass aus der Terminierung von $\mathcal{R}$ die Fundiertheit von $\to_{\mathcal{R}} \cup \rhd$ folgt. Wie üblich bezeichnet $\rhd$ die echte Teiltermrelation.

Wir definieren $\hookrightarrow$ als $\to_{\mathcal{R}} \cup \rhd$ und zeigen, dass jeder Term t nur endliche Reduktionen bzgl. $\hookrightarrow$ besitzt. Da $\mathcal{R}$ terminiert, können wir vollständige Induktion über $\to_{\mathcal{R}}$ führen.

Angenommen, t besitzt eine unendliche Auswertung bzgl. $\hookrightarrow$. Da $\rhd$ fundiert ist, muss nach einer endlichen Anzahl von $\rhd$-Schritten ein erster $\to_{\mathcal{R}}$-Schritt folgen. Also sieht eine unendliche Reduktion wie folgt aus:

$$t \rhd t|_{p_1} \rhd t|_{p_1 p_2} \rhd \cdots \rhd t|_{p_1 \ldots p_n} \to_{\mathcal{R}} s \hookrightarrow s_1 \hookrightarrow s_2 \hookrightarrow \ldots$$

Wir definieren p als $p_1 \ldots p_n$. Dann gilt offensichtlich

$$t = t[t|_p]_p \to_{\mathcal{R}} t[s]_p \trianglerighteq s \hookrightarrow s_1 \hookrightarrow s_2 \hookrightarrow \ldots$$

Also hat auch der Term $t[s]_p$ eine unendliche Reduktion bzgl. $\hookrightarrow$. Dies steht aber im Widerspruch zur Induktionshypothese, da wir für alle $\to_{\mathcal{R}}$-Nachfolger von t bereits wissen, dass sie keine unendliche Reduktion bzgl. $\hookrightarrow$ haben. $\square$