

## Lösungsvorschlag *Termersetzungssysteme* – Blatt 1

### Aufgabe 1

Wir benutzen hier die Schreibweise  $x + y$  für  $\text{plus}(x, y)$ ,  $x - y$  für  $\text{minus}(x, y)$ ,  $x * y$  für  $\text{times}(x, y)$  und  $\frac{x}{y}$  für  $\text{div}(x, y)$

a)

$$\begin{aligned}
 D(X) &\rightarrow 1 \\
 D(Y) &\rightarrow 0 \\
 D(1) &\rightarrow 0 \\
 D(0) &\rightarrow 0 \\
 D(p + q) &\rightarrow D(p) + D(q) \\
 D(p * q) &\rightarrow (D(p) * q) + (p * D(q)) \\
 D(p - q) &\rightarrow D(p) - D(q) \\
 D\left(\frac{p}{q}\right) &\rightarrow \frac{(D(p) * q) - (p * D(q))}{q * q}
 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{array}{ccc}
 & D\left(\frac{1}{X}\right) & \\
 & \downarrow & \\
 & \frac{(D(1) * X) - (1 * D(X))}{X * X} & \\
 \swarrow & & \searrow \\
 \frac{(0 * X) - (1 * D(X))}{X * X} & & \frac{(D(1) * X) - (1 * 1)}{X * X} \\
 \swarrow & & \searrow \\
 & \frac{(0 * X) - (1 * 1)}{X * X} &
 \end{array}$$

Das Ergebnis ist eindeutig.

## Aufgabe 2

a) Wähle  $\alpha_{\mathcal{O}} = 0, \alpha_{\text{succ}}(x) = 1 + x, \alpha_{\text{minus}}(x, y) = x \overset{*}{-} y$ .<sup>1</sup> Dann gilt für eine beliebige Interpretation  $I = (\mathbb{N}, \alpha, \beta)$

- $I(\text{minus}(\mathcal{O}, y)) = \alpha_{\text{minus}}(\alpha_{\mathcal{O}}, \beta(y)) = 0 \overset{*}{-} \beta(y) = 0 = I(\mathcal{O})$
- $I(\text{minus}(x, \mathcal{O})) = \alpha_{\text{minus}}(\beta(x), \alpha_{\mathcal{O}}) = \beta(x) \overset{*}{-} 0 = \beta(x) = I(x)$
- $I(\text{minus}(\text{succ}(x), \text{succ}(y))) = \alpha_{\text{minus}}(\alpha_{\text{succ}}(\beta(x)), \alpha_{\text{succ}}(\beta(y))) = (1 + \beta(x)) \overset{*}{-} (1 + \beta(y)) = (\beta(x) \overset{*}{-} \beta(y)) = \alpha_{\text{minus}}(\beta(x), \beta(y)) = I(\text{minus}(x, y))$

Folglich ist  $A_1 = (\mathbb{N}, \alpha)$  ein Modell von  $\mathcal{E}$ .

b) Für  $\alpha'_{\mathcal{O}} = 0, \alpha'_{\text{succ}}(x) = x, \alpha'_{\text{minus}}(x, y) = x$  gilt  $(\mathbb{N}, \alpha') \models \mathcal{E} \cup \{\text{minus}(x, \mathcal{O}) \equiv \text{succ}(\mathcal{O})\}$ . Dies kann genauso wie oben gezeigt werden.

c) Aus a) wissen wir  $A_1 \models \mathcal{E}$ . Für  $I = (\mathbb{N}, \alpha, \beta)$  mit  $\beta(x) = 0$  gilt jedoch  $I(\text{minus}(x, \mathcal{O})) = 0 \overset{*}{-} 0 = 0 \neq 1 = 1 + 0 = I(\text{succ}(x))$ , also  $A_1 \not\models \text{minus}(x, \mathcal{O}) \equiv \text{succ}(x)$ .

d) Aus a) und c) wissen wir  $A_1 \models \mathcal{E}$  und  $A_1 \not\models \text{minus}(x, \mathcal{O}) \equiv \text{succ}(\mathcal{O})$ . Folglich gilt  $\mathcal{E} \not\models \text{minus}(x, \mathcal{O}) \equiv \text{succ}(x)$ .

e) Sei  $A = (\mathcal{A}, \alpha) \models \mathcal{E}$ . Wir zeigen die benötigte Aussage

$$A \models \text{minus}(\text{succ}^n(\mathcal{O}), \text{succ}^n(\mathcal{O})) \equiv \mathcal{O}$$

induktiv über  $n$ . Dazu definieren wir zuerst zu jeder Belegung  $\beta$  die zugehörige Interpretation  $I_{\beta} := (\mathcal{A}, \alpha, \beta)$ .

Im Induktionsanfang betrachten wir  $n = 0$ . Wegen  $A \models \mathcal{E}$  gilt für  $I_{\beta'}$  mit  $\beta'(x) = I_{\beta'}(\mathcal{O})$  der Zusammenhang  $I_{\beta'}(\text{minus}(\mathcal{O}, \mathcal{O})) = I_{\beta'}(\text{minus}(x, \mathcal{O})) = I_{\beta'}(x) = I_{\beta'}(\mathcal{O})$ . Also gilt auch für beliebige Belegungen  $\beta$  die Gleichung  $I_{\beta}(\text{minus}(\mathcal{O}, \mathcal{O})) = I_{\beta}(\mathcal{O})$ . Damit haben wir  $A \models \text{minus}(\mathcal{O}, \mathcal{O}) \equiv \mathcal{O}$  gezeigt.

Im Induktionsschritt von  $n$  auf  $n + 1$  können wir die Induktionshypothese  $A \models \text{minus}(\text{succ}^n(\mathcal{O}), \text{succ}^n(\mathcal{O})) \equiv \mathcal{O}$  voraussetzen.

---

<sup>1</sup>Hier ist  $x \overset{*}{-} y$  das Monus, welches durch  $x \overset{*}{-} y := \max(x - y, 0)$  definiert ist. Monus ist also die Subtraktion auf natürlichen Zahlen bei der keine negativen Zahlen entstehen.

Zunächst benutzen wir in analoger Weise zum Induktionsanfang eine Belegung  $\beta'$  mit  $\beta'(x) = I_{\beta'}(\text{succ}^n(\mathcal{O}))$ ,  $\beta'(y) = I_{\beta'}(\text{succ}^n(\mathcal{O}))$  um für eine beliebige Belegung  $\beta$  die Gleichung

$$I_{\beta}(\text{minus}(\text{succ}^{n+1}(\mathcal{O}), \text{succ}^{n+1}(\mathcal{O}))) = I_{\beta}(\text{minus}(\text{succ}^n(\mathcal{O}), \text{succ}^n(\mathcal{O})))$$

zu folgern. Zusammen mit der Induktionshyothese

$$I_{\beta}(\text{minus}(\text{succ}^n(\mathcal{O}), \text{succ}^n(\mathcal{O}))) = I_{\beta}(\mathcal{O})$$

ergibt sich so

$$I_{\beta}(\text{minus}(\text{succ}^{n+1}(\mathcal{O}), \text{succ}^{n+1}(\mathcal{O}))) = I_{\beta}(\text{minus}(\text{succ}^n(\mathcal{O}), \text{succ}^n(\mathcal{O}))) = I_{\beta}(\mathcal{O})$$

und damit also auch  $A \models \text{minus}(\text{succ}^{n+1}(\mathcal{O}), \text{succ}^{n+1}(\mathcal{O})) \equiv \mathcal{O}$ .

- f) Wir zeigen, dass für alle  $\mathcal{E}$  und alle  $\alpha$  gilt:  $(\{a\}, \alpha) \models \mathcal{E}$ . Für eine beliebige Interpretation  $I = (\{a\}, \alpha, \beta)$  ist stets  $I(t) \in \{a\}$ . Also gilt für alle Terme  $s$  und  $t$  der Zusammenhang  $I(s) = a = I(t)$  und somit ist  $I \models s \equiv t$  für alle Gleichungen  $s \equiv t \in \mathcal{E}$ .

### Aufgabe 3

- a) Die Aussage ist falsch: Seien  $\sigma = [x/y]$ ,  $\mu = [z/y]$  und  $t = z$  so gilt:

$$t\sigma\mu = z[x/y][z/y] = y \neq z = z[x/y] = z[x/y[z/y]] = t[x/y\mu]$$

- b) Die Aussage ist wahr. Wir benutzen hier Induktion über die Stelle  $\pi$ .

Am Induktionsanfang ist  $\pi = \varepsilon$  und es gilt:

$$\begin{aligned} t[t\sigma|_{\pi}]_{\pi}\sigma &= t[t\sigma|_{\varepsilon}]_{\varepsilon}\sigma \\ &= (t\sigma|_{\varepsilon})\sigma \\ &= t\sigma\sigma \\ &= t\sigma \quad (\text{wegen: } \sigma = \sigma\sigma) \end{aligned}$$

Für den Induktionsschluss gilt  $\pi = i\pi'$  und  $t = f(t_1, \dots, t_n)$ , also auch:

$$\begin{aligned}
t[t\sigma|_{\pi}]_{\pi}\sigma &= t[t\sigma|_{i\pi'}]_{i\pi'}\sigma \\
&= f(t_1, \dots, t_i, \dots, t_n)[t\sigma|_{i\pi'}]_{i\pi'}\sigma \\
&= f(t_1, \dots, t_i[t\sigma|_{i\pi'}]_{\pi'}, \dots, t_n)\sigma \\
&= f(t_1, \dots, t_i[f(t_1, \dots, t_i, \dots, t_n)\sigma|_{i\pi'}]_{\pi'}, \dots, t_n)\sigma \\
&= f(t_1, \dots, t_i[f(t_1\sigma, \dots, t_i\sigma, \dots, t_n\sigma)|_{i\pi'}]_{\pi'}, \dots, t_n)\sigma \\
&= f(t_1, \dots, t_i[t_i\sigma|_{\pi'}]_{\pi'}, \dots, t_n)\sigma \\
&= f(t_1\sigma, \dots, t_i[t_i\sigma|_{\pi'}]_{\pi'}\sigma, \dots, t_n\sigma) \\
&= f(t_1\sigma, \dots, t_i\sigma, \dots, t_n\sigma) && \text{(durch Ind.-Hyp.)} \\
&= f(t_1, \dots, t_i, \dots, t_n)\sigma \\
&= t\sigma
\end{aligned}$$

- c) Die Aussage ist wahr. Wenn  $\pi_1 \perp \pi_2$  dann haben beide Positionen eine erste Stelle an der sie sich unterscheiden. Also  $\pi_1 = \pi i\pi'_1$  und  $\pi_2 = \pi j\pi'_2$  mit  $i \neq j$ . Wir zeigen die Aussage nun induktiv über das gemeinsame Präfix  $\pi$ . Offensichtlich muss  $t$  von der Form  $f(t_1, \dots, t_n)$  sein. Für  $\pi = \varepsilon$  gilt  $t|_{\pi_1} = t|_{i\pi'_1} = t_i|_{\pi'_1} = f(t_1, \dots, t_i, \dots, t_j[p]_{\pi'_2}, \dots, t_n)|_{i\pi'_1} = f(t_1, \dots, t_n)[p]_{j\pi'_2}|_{i\pi'_1} = t[p]_{\pi_2}|_{\pi_1}$ . Für  $\pi = k\pi'$  gilt  $t|_{\pi_1} = f(t_1, \dots, t_n)|_{k\pi'i\pi'_1} = t_k|_{\pi'i\pi'_1} \stackrel{(ind.)}{=} t_k[p]_{\pi'j\pi'_2}|_{\pi'i\pi'_1} = f(t_1, \dots, t_k[p]_{\pi'j\pi'_2}, \dots, t_n)|_{k\pi'i\pi'_1} = f(t_1, \dots, t_n)[p]_{k\pi'j\pi'_2}|_{k\pi'i\pi'_1} = t[p]_{\pi_2}|_{\pi_1}$ .