

Lösungsvorschlag *Termersetzungssysteme* – Blatt 10

Aufgabe 1

a) Wir benutzen die folgenden Regeln:

$$\mathcal{M} \cup \{f(s_1, \dots, s_n) \lesssim^? f(t_1, \dots, t_n)\} \implies \mathcal{M} \cup \{s_i \lesssim^? t_i \mid 1 \leq i \leq n\} \quad (1)$$

$$\mathcal{M} \cup \{f(s_1, \dots, s_n) \lesssim^? g(t_1, \dots, t_m)\} \implies \perp \quad \text{falls } f \neq g \quad (2)$$

$$\mathcal{M} \cup \{f(s_1, \dots, s_n) \lesssim^? x\} \implies \perp \quad \text{falls } x \in \mathcal{V} \quad (3)$$

$$\mathcal{M} \cup \{x \lesssim^? t, x \lesssim^? s\} \implies \perp \quad \text{falls } s \neq t \quad (4)$$

Die Regel (1) nennen wir *Termreduktion*, die Regeln (2) und (3) entsprechen einem *Clash-Failure*. Zu beachten ist auch, dass man eine Ungleichung der Form $x \lesssim^? x$ *nicht* entfernen darf, da man sonst einen eventuell auftretenden Konflikt bzgl. Regel (4) übersehen könnte.

b) Wir wenden die Regeln aus a) sukzessive an, beginnend mit dem ersten Matchingproblem.

$$\begin{array}{l} \implies \{h(f(x, y), g(y, x), x) \lesssim^? h(f(x, a), g(a, x), y)\} \quad (1) \\ \implies \{f(x, y) \lesssim^? f(x, a), g(y, x) \lesssim^? g(a, x), x \lesssim^? y\} \quad (1) \\ \implies \{x \lesssim^? x, y \lesssim^? a, g(y, x) \lesssim^? g(a, x), x \lesssim^? y\} \quad (4) \\ \implies \perp \end{array}$$

Folglich gibt es keinen Matcher für unser Matchingproblem.

Nun zum zweiten Matchingproblem:

$$\begin{array}{l} \implies \{f(f(x, y), f(a, x)) \lesssim^? f(f(f(x, y), g(y)), f(a, f(x, y)))\} \quad (1) \\ \implies \{f(x, y) \lesssim^? f(f(x, y), g(y)), f(a, x) \lesssim^? f(a, f(x, y))\} \quad (1), (1) \\ \implies \{x \lesssim^? f(x, y), y \lesssim^? g(y), a \lesssim^? a, x \lesssim^? f(x, y)\} \quad (1) \\ \implies \{x \lesssim^? f(x, y), y \lesssim^? g(y)\} \end{array}$$

Wir beenden mit Erfolg, der Matcher lautet $\sigma = [x/f(x, y), y/g(y)]$.

c)

- Wir beweisen zunächst, dass jede Normalform bzgl. \implies entweder \perp oder in gelöster Form ist. Sei also \mathcal{M} ein Matchingproblem, das in Normalform bezüglich \implies ist. Entweder, \mathcal{M} hat die Form \perp und wir sind fertig, oder \mathcal{M} ist eine Menge von Ungleichungen $s \lesssim^? t$. Angenommen, \mathcal{M} wäre nicht gelöst. Dies kann aus mehreren Gründen der Fall sein

- a) \mathcal{M} enthält eine Gleichung $s \lesssim^? t$, und s ist keine Variable. Dann kann in jedem Fall Regel (1), (2) oder (3) angewendet werden, im Widerspruch zur Normalität von \mathcal{M} .
 - b) \mathcal{M} enthält nur Gleichungen der Form $x_i \lesssim^? t_i$, aber die Variablen sind nicht paarweise verschieden. Dann kann Regel (4) angewendet werden, im Widerspruch zur Normalität von \mathcal{M} .
- Wir führen eine Fallunterscheidung über die angewendeten Regeln durch.

Regel (1) Sei $\mathcal{M} = \mathcal{N} \cup \{f(s_1, \dots, s_n) \lesssim^? f(t_1, \dots, t_n)\}$, dann erhalten wir nach Anwenden von Regel (1) $\mathcal{M}' = \mathcal{N} \cup \{s_i \lesssim^? t_i \mid 1 \leq i \leq n\}$. Sei $\sigma \in Match(\mathcal{M})$. Das ist äquivalent zu $s\sigma = t$ für alle $s \lesssim^? t$ aus \mathcal{N} sowie $f(s_1, \dots, s_n)\sigma = f(t_1, \dots, t_n)$, was wiederum äquivalent ist zu $s\sigma = t$ für alle $s \lesssim^? t$ aus \mathcal{N} sowie $s_i\sigma = t_i$ für alle $s_i \lesssim^? t_i, 1 \leq i \leq n$. Dies ist schließlich äquivalent zu $s\sigma = t$ für alle $s \lesssim^? t$ aus \mathcal{M}' , also gilt $Match(\mathcal{M}) = Match(\mathcal{M}')$.

Regel (2) Das Matchingproblem \mathcal{M} enthalte die Ungleichung

$$f(s_1, \dots, s_n) \lesssim^? g(t_1, \dots, t_m) \quad \text{mit } f \neq g.$$

Dann ist das Matchingproblem offensichtlich unlösbar, da $f(s_1, \dots, s_n)\sigma$ stets f als äußerstes Funktionssymbol hat. Da wir mit \implies nach \perp auswerten, gilt folgerichtig $Match(\mathcal{M}) = Match(\mathcal{M}') = \emptyset$.

Regel (3) Das Matchingproblem \mathcal{M} enthalte die Ungleichung

$$f(s_1, \dots, s_n) \lesssim^? x \quad \text{für eine Variable } x$$

Dann ist das Matchingproblem unlösbar, da $f(\dots)\sigma$ stets von der Form $f(\dots)$ ist.

Regel (4) Das Matchingproblem \mathcal{M} enthalte zwei Ungleichungen $x \lesssim^? t$ und $x \lesssim^? s$ mit $s \neq t$. Das Matchingproblem ist offensichtlich ebenfalls unlösbar, da $x\sigma = t$ und $x\sigma = s$ gelten müsste, was wegen $s \neq t$ unmöglich ist. Auch hier werten wir zu \perp ausgewertet und es gilt $Match(\mathcal{M}) = Match(\mathcal{M}') = \emptyset$.

Da in jedem Reduktionsschritt die Gesamtzahl der Funktionssymbole in \mathcal{M} abnimmt, terminiert das Verfahren auch.

Aufgabe 2

- \mathcal{R}_1 ist konfluent, da mit der QLPO und der Quasi-Präzedenz

$$\{\text{choose}_i \mid 1 \leq i \leq n\} \sqsupset s \sqsupset 0$$

die Terminierung gezeigt werden kann und es überhaupt keine kritischen Paare gibt. Daraus folgt dann die lokale Konfluenz und mit der Fundiertheit von $\rightarrow_{\mathcal{R}}$ auch die Konfluenz.

- \mathcal{R}_2 ist lokal konfluent, aber nicht konfluent. Wir haben die Auswertungen

$$\begin{aligned} \text{choose}_0 &\rightarrow 0 \\ \text{choose}_0 &\rightarrow \text{choose}_1 \rightarrow s(0) \end{aligned}$$

Die beiden erreichten Terme sind Normalformen, daher ist \mathcal{R}_2 nicht konfluent. Aber \mathcal{R}_2 ist lokal konfluent. In einem Schritt kommt man von choose_i entweder zu $\text{choose}_{(i+1) \bmod 4}$ oder zu $s^i(0)$. Diese Terme sind aber stets zusammenführbar, da man von choose_i in weiteren drei Auswertungsschritten zu $\text{choose}_{(i+4) \bmod 4} = \text{choose}_i$ gelangt. Von dort kommt man in einem letzten Schritt zu $s^i(0)$.

- \mathcal{R}_3 ist nicht lokal konfluent. Dazu betrachten wir folgende zwei Ableitungen:

$$\begin{aligned} \text{critical} &\rightarrow \text{even}(\text{choose}_0(s(0))) \\ \text{critical} &\rightarrow \text{even}(\text{choose}_0(0)) \end{aligned}$$

Diese in einem einzigen Schritt aus critical abgeleiteten Terme lassen sich nicht zusammenführen: Für die weitere Ableitung der Terme kommt jeweils genau eine Regel in Frage, und wir erhalten

$$\begin{aligned} \text{even}(\text{choose}_0(s(0))) &\rightarrow \text{even}(\text{choose}_1(0)) \rightarrow \text{even}(s(0)) \rightarrow \text{false} \\ \text{even}(\text{choose}_0(0)) &\rightarrow \text{even}(0) \rightarrow \text{true} \end{aligned}$$

Offensichtlich können wir true und false nicht zusammenführen, das TES ist also nicht einmal lokal konfluent.

- \mathcal{R}_4 hingegen ist konfluent. Ergänzt man die QLPO für \mathcal{R}_1 darum, dass critical größer als alle anderen Funktionssymbole ist und außerdem $\text{ge} \sqsupset \{\text{true}, \text{false}\}$, lässt sich die Terminierung beweisen. Kritische Paare sind jeweils die Auswertungsergebnisse von critical . Diese lassen sich allerdings *immer* zusammenführen, da $\text{choose}_0(s^i(0))$ stets zu einem Term der Form $s^i(0)$, $0 \leq i \leq 3$ ausgewertet. Dann wertet aber $\text{ge}(s^4(0), s^i(0))$ stets zu true aus und die Terme sind zusammenführbar. Wieder folgt aus lokaler Konfluenz und Fundiertheit die Konfluenz.

Aufgabe 3

Sei \rightarrow stark konfluent. Zu zeigen ist, dass für Terme p, s, t mit $p \rightarrow^* s$ und $p \rightarrow^* t$ die Terme s und t zusammenführbar ($s \downarrow t$) sind. Wir wollen dies mittels Induktion zeigen, doch stellt sich heraus, dass hierfür eine stärkere Aussage benötigt wird:

Sind p, s und t Terme mit $s \leftarrow^n p \rightarrow^m t$, so gibt es einen Term q mit $s \rightarrow^{\leq m} q \rightarrow^{\leq n} t$.

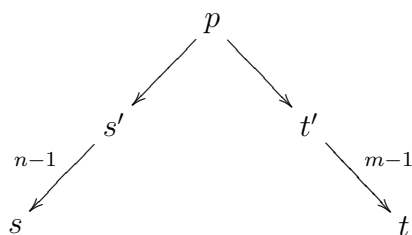
Dabei bedeutet $p \rightarrow^n s$, dass man in n Schritten von p zu s mittels \rightarrow kommt.

Wir führen eine vollständige Induktion über $n + m$ durch.

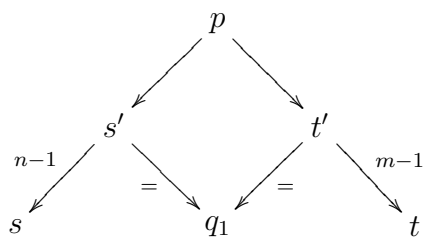
Fall 1: $n + m = 0$ Dann ist $s = p = t$, und es gilt für $q = p$ trivialerweise $s \rightarrow^0 q \leftarrow^0 t$.

Fall 2: $n + m > 0$ Falls $n = 0$ gilt $s = p$ und wir wählen $q = t$. Dann gilt offensichtlich $s \rightarrow^{\leq m} q \leftarrow^0 t$. Der Fall $m = 0$ ist analog.

Wir können also von $n, m \geq 1$ ausgehen. Dann gibt es s' und t' mit:

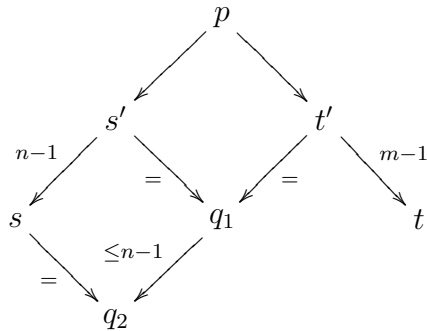


Aufgrund der starken Konfluenz gibt es einen Term q_1 mit $s' \rightarrow^= q_1 \leftarrow^= t'$, also

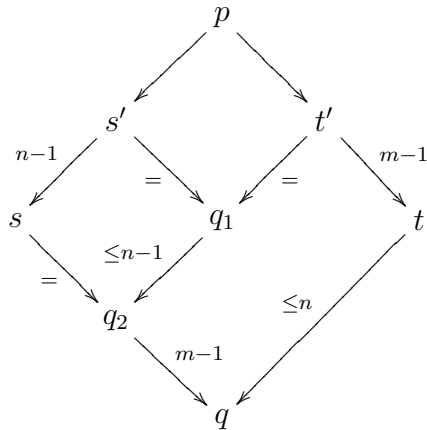


Betrachten wir zunächst die Ableitung $s \leftarrow^{n-1} s' \rightarrow^i q_1$, wobei $i \in \{0, 1\}$. Daher gilt $n - 1 + i \leq n < n + m$. Auf diese Ableitung trifft also die

Induktionshypothese zu. Deshalb gibt es einen Term q_2 mit $s \rightarrow^i q_2 \leftarrow^{\leq n-1} q_1$:



Wie in dem Diagramm zu sehen ist, gelang man von t' in maximal n Schritten zu q_2 und in $m - 1$ Schritten zu t . Auch hier trifft demnach die Induktionshypothese zu, da $n + m - 1 < n + m$. Daher gibt es einen Term q mit:



Folglich gilt die Behauptung, da $s \rightarrow^{\leq m} q \leftarrow^{\leq n} t$.