

Lösungsvorschlag *Termersetzungssysteme* – Blatt 12

Aufgabe 1

Sei $\langle s, t \rangle \in \mathcal{CP}(\mathcal{R})$. Das bedeutet: Es gibt variablendisjunkte Regeln $l_1 \rightarrow r_1, l_2 \rightarrow r_2 \in \mathcal{R}$, eine Stelle π von l_1 und eine Substitution σ mit $\sigma \in mgu(l_1|_\pi, l_2)$. Die Terme des kritischen Pairs sind dann $s = r_1\sigma$ und $t = l_1[r_2]_\pi\sigma$. Das bedeutet: $l_1\sigma \rightarrow_{\mathcal{R}} r_1\sigma = s$ sowie

$$l_1\sigma = l_1\sigma[l_2\sigma]_\pi \rightarrow_{\mathcal{R}} l_1[r_2]_\pi\sigma = t$$

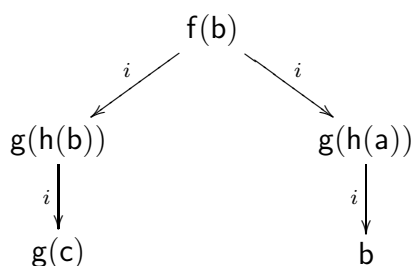
Daraus folgt aber sofort $s \leftrightarrow_{\mathcal{R}} l_1\sigma \leftrightarrow t$, also $s \leftrightarrow^* t$.

Aufgabe 2

a) Diese Aussage ist **falsch**¹. Zum Beweis betrachten wir das TES

$$\begin{array}{ll} f(x) \rightarrow g(h(x)) & g(h(x)) \rightarrow b \\ f(x) \rightarrow g(h(a)) & h(b) \rightarrow c \end{array}$$

Das einzige *innermost*-kritische Paar ist $\langle g(h(x)), g(h(a)) \rangle$. Dies lässt sich aber einfach zusammenführen. Trotzdem ist $\xrightarrow{i}_{\mathcal{R}}$ nicht konfluent, denn wir haben



Wie man sieht, lassen sich diese beiden Terme nicht zusammenführen.

b) Diese Aussage ist **falsch**. Dies liegt daran, dass die Definition für ein innermost-kritisches Paar etwas zu streng ist. Betrachte dazu das folgende TES:

$$\begin{array}{ll} f(a, x) \rightarrow c & a \rightarrow b \\ f(x, b) \rightarrow d & b \rightarrow a \end{array}$$

¹Der Fehler in den meisten angegebenen *Beweisen* war, dass die $\xrightarrow{i}_{\mathcal{R}}$ -Relation im Gegensatz zu $\rightarrow_{\mathcal{R}}$ *nicht* stabil ist.

Wir erhalten das kritische Paar $\langle c, d \rangle$, welches nicht zusammenführbar ist. Trotzdem ist $\xrightarrow{i}_{\mathcal{R}}$ lokal konfluent. Die beiden linken Regeln sind niemals anwendbar, da a und b nicht in Normalform bezüglich \mathcal{R} sind. Da wir für $\xrightarrow{i}_{\mathcal{R}}$ also nur die beiden linken Regeln verwenden können, ist $\xrightarrow{i}_{\mathcal{R}}$ offensichtlich lokal konfluent.

Aufgabe 3

Durch eine Überlappung der ersten und der zweiten Regeln erhalten wir das kritische Paar $\langle r_1[x/h(x)], f(r_2)[x/h(x)] \rangle$. Am einfachsten ist es, für die rechten Seiten Grundterme zu verwenden und statt der Zusammenführbarkeit sofort Gleichheit zu fordern. Dann löst $r_1 = f(a), r_2 = a$ unser Problem. Mit $g \sqsupset a$ terminiert das TES:

$$f(g(x)) \rightarrow f(a), \quad g(h(x)) \rightarrow a$$

Aufgabe 4

Ein linksreduziertes Grundtermersetzungssystem (*lg-TES*) ist trivialerweise linear. Zusätzlich ist es auch nichtüberlappend: Da wir keine Variablen haben, ist $l\sigma = l$ für alle Substitutionen σ . Hätten wir nun eine Überlappung zweier Regeln l_1 und l_2 , so wäre $l_1|_{\pi} = l_2$ für eine Stelle π . Dann ist aber l_1 *nicht* in Normalform bezüglich $\mathcal{R} \setminus \{l_1 \rightarrow r_1\}$, weil wir auf l_1 die Regel $l_2 \rightarrow r_2$ anwenden können. Da also jedes lg-TES linear und nichtüberlappend, also *orthogonal* ist, haben wir die Konfluenz.

Für ein g-TES, das nicht konfluent ist, betrachten wir

$$a \rightarrow c, \quad a \rightarrow b$$

Hier sind b und c offensichtlich nicht zusammenführbar.

Für ein l-TES, das nicht konfluent ist, betrachten wir

$$f(x, a) \rightarrow b \quad f(a, x) \rightarrow c$$

Dann haben wir $f(a, a) \rightarrow b$ sowie $f(a, a) \rightarrow c$, also ist das TES nicht konfluent.

Aufgabe 5

a) Wir erhalten die folgenden Regeln:

Nr	Regel	Ordnung
(1)	$f(g(f(x))) \rightarrow x$	\succ_{emb}
(2)	$f(g(x)) \rightarrow g(f(x))$	$LPO, f \sqsupset g$
(3)	$g(f(f(x))) \rightarrow x$	\succ_{emb}

Dabei entstehen folgende kritische Paare:

Nr	Krit. Paar	Neue Regel
1, 1	$\langle \mathbf{g}(\mathbf{f}(x)), \mathbf{f}(\mathbf{g}(x)) \rangle$	2
1, 2	$\langle \mathbf{g}(x), \mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{g}(\mathbf{f}(x)))) \rangle$	–
1, 2	$\langle x, \mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{f}(x))) \rangle$	3
1, 3	$\langle \mathbf{f}(x), \mathbf{f}(x) \rangle$	–
2, 3	$\langle \mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{f}(x)))) \rangle, \mathbf{f}(x)$	–
3, 1	$\langle \mathbf{g}(\mathbf{f}(x)), \mathbf{g}(\mathbf{f}(x)) \rangle$	–
3, 2	$\langle \mathbf{g}(x), \mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{f}(x)))) \rangle$	–

b) Wir erhalten folgende Regeln:

Nr	Regel	Ordnung
(1)	$\mathbf{f}(\mathbf{f}(x)) \rightarrow \mathbf{f}(x)$	\succ_{emb}
(2)	$\mathbf{f}(\mathbf{f}(x)) \rightarrow \mathbf{g}(x)$	$LPO, \mathbf{f} \sqsupset \mathbf{g}$
(3)	$\mathbf{g}(\mathbf{f}(x)) \rightarrow x$	\succ_{emb}
(4)	$\mathbf{f}(x) \rightarrow \mathbf{g}(x)$	$LPO, \mathbf{f} \sqsupset \mathbf{g}$
(5)	$\mathbf{g}(x) \rightarrow x$	\succ_{emb}

Dabei entstehen folgende kritische Paare:

Nr	Krit. Paar	Neue Regel
1, 1	$\langle \mathbf{f}(\mathbf{f}(x)), \mathbf{f}(\mathbf{f}(x)) \rangle$	–
1, 2	$\langle \mathbf{f}(x), \mathbf{g}(x) \rangle$	4
1, 2	$\langle \mathbf{f}(\mathbf{f}(x)), \mathbf{f}(\mathbf{g}(x)) \rangle$	–
2, 2	$\langle \mathbf{g}(\mathbf{f}(x)), \mathbf{f}(\mathbf{g}(x)) \rangle$	–
2, 1	$\langle \mathbf{g}(\mathbf{f}(x)), \mathbf{f}(\mathbf{f}(x)) \rangle$	–
3, 1	$\langle \mathbf{f}(x), \mathbf{g}(\mathbf{f}(x)) \rangle$	5
3, 2	$\langle \mathbf{f}(x), \mathbf{g}(\mathbf{g}(x)) \rangle$	–
1, 4	$\langle \mathbf{f}(x), \mathbf{f}(\mathbf{g}(x)) \rangle$	–
2, 4	$\langle \mathbf{g}(x), \mathbf{f}(\mathbf{g}(x)) \rangle$	–
3, 4	$\langle x, \mathbf{g}(\mathbf{g}(x)) \rangle$	–
4, 1	$\langle \mathbf{g}(\mathbf{f}(x)), \mathbf{f}(x) \rangle$	–
4, 2	$\langle \mathbf{g}(\mathbf{f}(x)), \mathbf{g}(x) \rangle$	–
5, 3	$\langle \mathbf{f}(x), x \rangle$	–