

Lösungsvorschlag *Termersetzungssysteme* – Blatt 13

Aufgabe 1

a) Zunächst richten wir die Gleichungen. Insbesondere wegen der *Variablenbedingung* gibt es genau eine Möglichkeit. Wir wählen

$$\mathcal{R} = \left\{ \begin{array}{l} f(x, y) \rightarrow g(x) \\ f(x, y) \rightarrow g(y) \\ g(s(x)) \rightarrow a \\ h(x, y) \rightarrow s(x) \\ h(x, x) \rightarrow x \end{array} \right\}$$

Wir nutzen dazu die LPO mit Präzedenz $f \sqsupset g$, $s \sqsupset a$ sowie $h \sqsupset s$. Im nächsten Schritt bestimmen wir die kritischen Paare. Davon gibt es nur zwei, die einmal aus den ersten beiden und einmal aus den letzten beiden Regeln entstehen:

$$\mathcal{CP}(\mathcal{R}) = \{\langle g(x), g(y) \rangle, \langle s(x), x \rangle\}$$

Das erste kritische Paar ist nicht zusammenführbar, kann aber nicht gerichtet werden, ohne die Terminierung des TES zu zerstören. Der Algorithmus hört also mit Fehlschlag auf.

b) Hier gibt es mehrere Möglichkeiten, die Gleichungen zu richten. Als Eingabe für BASIC COMPLETION wählen wir die LPO mit Präzedenz $f \sqsupset h \sqsupset g$. Dann richten wir die Gleichungen wie folgt:

$$\mathcal{R} = \left\{ \begin{array}{l} f(g(x)) \rightarrow g(h(x)) \\ h(g(x)) \rightarrow g(h(x)) \end{array} \right\}$$

Da wir keine kritischen Paare haben ($\mathcal{CP}(\mathcal{R}) = \emptyset$), terminiert der Algorithmus mit TRUE und gibt uns das zu \mathcal{E} äquivalente, konvergente TES \mathcal{R} aus.

Aufgabe 2

Die Schritte ORIENTIEREN und GENERIEREN erfolgen zunächst wie in Aufgabe 1, a). Wir haben dann die Situation

$$\mathcal{E}_2 = \{g(x) \equiv g(y), s(x) \equiv x\} \quad \mathcal{R}_2 = \left\{ \begin{array}{l} f(x, y) \rightarrow g(x) \\ f(x, y) \rightarrow g(y) \\ g(s(x)) \rightarrow a \\ h(x, y) \rightarrow s(x) \\ h(x, x) \rightarrow x \end{array} \right\}$$

Die Präzedenz der LPO ist $f \sqsupset g$, $s \sqsupset a$ sowie $h \sqsupset s$. Die zweite Gleichung lässt sich ORIENTIEREN und wir erhalten

$$\mathcal{E}_3 = \{g(x) \equiv g(y)\} \quad \mathcal{R}_3 = \mathcal{R}_2 \cup \{s(x) \rightarrow x\}$$

Wir wenden erneut GENERIEREN an und erhalten

$$\mathcal{E}_4 = \{g(x) \equiv g(y), g(x) \equiv a\} \quad \mathcal{R}_4 = \mathcal{R}_3$$

Auf die neue Gleichung wenden wir ebenfalls wieder ORIENTIEREN an und erhalten

$$\mathcal{E}_5 = \{g(x) \equiv g(y)\} \quad \mathcal{R}_5 = \mathcal{R}_4 \cup \{g(x) \rightarrow a\}$$

Der Präzedenz fügen wir noch $g \sqsupset a$ hinzu, damit wir die Gleichung so orientieren können. Nun wenden wir REDUZIERE GLEICHUNG an und erhalten mit der Regel $g(x) \rightarrow a$

$$\mathcal{E}_6 = \{a \equiv a\} \quad \mathcal{R}_6 = \mathcal{R}_5$$

Noch einmal LÖSCHEN liefert

$$\mathcal{E}_7 = \emptyset \quad \mathcal{R}_7 = \mathcal{R}_6$$

Auf die Regel mit $g(s(x))$ wenden wir REDUZIERE LINKS an mit der Regel $g(x) \rightarrow x$. Dies ist erlaubt, da wir letztere Regel nicht mit ersterer reduzieren können. Wir erhalten

$$\mathcal{E}_8 = \{a \equiv a\} \quad \mathcal{R}_8 = \mathcal{R}_7 \setminus \{g(s(x)) \rightarrow a\}$$

Noch ein letztes mal LÖSCHEN und wir sind endlich fertig. Der Algorithmus terminiert erfolgreich und liefert das konvergente, zu \mathcal{E} äquivalente TES \mathcal{R}_8 .

Aufgabe 3

Im ersten Schritt wird \mathcal{R}_0 bestimmt durch Richten der Gleichungen.

$$\mathcal{R}_0 = \left\{ \begin{array}{l} f(g(x)) \rightarrow g(h(x)) \\ g(h(x)) \rightarrow h(g(x)) \end{array} \right\}$$

Im folgenden lassen wir der Lesbarkeit halber alle Klammern weg! Sei $s = ffhhg$ und $t = fhhhg$. Bezüglich \mathcal{R}_0 sind sie bereits in Normalform. Wir müssen also weiter iterieren. Dazu generieren wir die kritischen Paare. Es gibt nur eines, das aus

Überlappung der beiden Regeln entsteht, nämlich $\langle \text{ghhx}, \text{fhgx} \rangle$. Zu Normalformen reduziert erhalten wir die neue Regel $\text{fhgx} \rightarrow \text{hhgx}$, also

$$\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_0 \cup \{\text{fhgx} \rightarrow \text{hhgx}\}$$

Die Terme s und t lassen sich damit immernoch nicht weiter reduzieren, so dass wir erneut kritische Paare berechnen müssen. Wieder gibt es nur eines, nämlich $\langle \text{hhghx}, \text{fhhgx} \rangle$. Zu Normalformen reduziert erhalten wir das neue TES

$$\mathcal{R}_2 = \mathcal{R}_1 \cup \{\text{fhhgx} \rightarrow \text{hhghx}\}$$

Auch das hilft uns noch nicht, wir berechnen das nächste kritische Paar, das aus der neuen und der zweiten Regel entsteht, nämlich $\langle \text{hhhghx}, \text{fhhhgx} \rangle$. Wir erhalten

$$\mathcal{R}_3 = \mathcal{R}_2 \cup \{\text{fhhhgx} \rightarrow \text{hhhghx}\}$$

Mit dieser letzten Regel erhalten wir

$$s = \text{ffhhhga} \rightarrow_{\mathcal{R}_3} \text{fhhhgha} = t$$

In diesem TES sind beide Terme s und t zusammenführbar, also folgt $s \equiv t$ aus \mathcal{E}_2 .

Aufgabe 4

Angenommen, \mathcal{R}_0 und \mathcal{R}_1 sind zwei äquivalente TEsE. Das bedeutet: $\leftrightarrow_{\mathcal{R}_0}^* = \leftrightarrow_{\mathcal{R}_1}^*$. Für eine Regel $l \rightarrow r$ aus \mathcal{R}_0 gilt natürlich $l \leftrightarrow_{\mathcal{R}_0}^* r$, also auch $l \leftrightarrow_{\mathcal{R}_1}^* r$. Weil \mathcal{R}_1 konvergent ist, müssen also l und r in \mathcal{R}_1 zusammenführbar sein, da \mathcal{R}_1 konfluent ist und daher die *Church-Rosser*-Eigenschaft besitzt. Analog argumentiert man für Regeln aus \mathcal{R}_1 .

Nun zur anderen Richtung. Wir zeigen $\leftrightarrow_{\mathcal{R}_0}^* \subseteq \leftrightarrow_{\mathcal{R}_1}^*$, die andere Richtung wird analog gezeigt. Seien also für alle Regeln $l \rightarrow r$ aus \mathcal{R}_0 die Terme l und r in \mathcal{R}_1 zusammenführbar, es gibt also einen Term q mit $l \rightarrow_{\mathcal{R}_1}^* q$ und $r \rightarrow_{\mathcal{R}_1}^* q$. Seien nun s und t Terme mit $s \rightarrow_{\mathcal{R}_0} t$. Für einen Term p gilt also $s = p[l\sigma]_{\pi} \rightarrow_{\mathcal{R}_0} p[r\sigma]_{\pi} = t$. Weil \leftrightarrow^* stabil und monoton ist, folgt aus der Zusammenführbarkeit von l und r in \mathcal{R}_1 auch die Zusammenführbarkeit von s und t , also haben wir $s \leftrightarrow_{\mathcal{R}_1}^* t$. Analoges folgt für $s \leftarrow_{\mathcal{R}_0} t$, so dass wir insgesamt $\leftrightarrow_{\mathcal{R}_0} \subseteq \leftrightarrow_{\mathcal{R}_1}^*$ haben. Dann ist aber $\leftrightarrow_{\mathcal{R}_0}^* \subseteq (\leftrightarrow_{\mathcal{R}_1}^*)^* = \leftrightarrow_{\mathcal{R}_1}^*$, also $\leftrightarrow_{\mathcal{R}_0}^* \subseteq \leftrightarrow_{\mathcal{R}_1}^*$. Genau so zeigt man $\leftrightarrow_{\mathcal{R}_1}^* \subseteq \leftrightarrow_{\mathcal{R}_0}^*$ und die Behauptung ist bewiesen.

Um nun die Äquivalenz von \mathcal{R}_0 und \mathcal{R}_1 zu entscheiden, muss man nur prüfen, ob die linken und rechten Seiten der Regeln des einen TES im anderen TES zusammenführbar sind. Weil die gegebenen TEsE konvergent sind, reicht es dazu,

die linken und rechten Seiten auf Normalform zu reduzieren und auf Gleichheit zu prüfen. Das Verfahren terminiert, da die TESe fundiert sind und da aufgrund der Endlichkeit nur endlich viele Paare auf Zusammenführbarkeit zu überprüfen sind.

Aufgabe 5

Aus der Vervollständigung (siehe separate Text-Datei) erhält man das zu \mathcal{E} äquivalente und konvergente TES \mathcal{R} :

$$\mathcal{R} = \left\{ \begin{array}{ll} f(f(x, y), z) \rightarrow f(x, f(y, z)) & f(x, f(i(x), y)) \rightarrow y \\ f(e, x) \rightarrow x & i(i(x)) \rightarrow f(x, e) \\ f(x, i(x)) \rightarrow e & f(i(x), f(x, y)) \rightarrow y \\ i(f(x, y)) \rightarrow f(i(y), i(x)) & f(i(x), e) \rightarrow i(x) \\ i(e) \rightarrow e & \end{array} \right\}$$

Nach Aufgabe 4 sind \mathcal{R} und das konvergente TES für Gruppen nicht äquivalent, da für die Regel $f(i(x), x) \rightarrow e$ die linke und rechte Seite nicht mit \mathcal{R} zusammengeführt werden können, da beide Seiten in Normalform bzgl. \mathcal{R} sind. Damit ist aber auch \mathcal{E} nicht äquivalent zum konvergenten TES für Gruppen.