Lösungsvorschlag *Termersetzungssysteme* – Blatt 2

Aufgabe 1

Wir zeigen die Aussage induktiv über n: Es gilt $\mathsf{minus}(y, \mathcal{O}) \equiv_{\mathcal{E}} y$ und mit Lemma 3.1.4 auch $\mathsf{minus}(\mathcal{O}, \mathcal{O}) \equiv_{\mathcal{E}} \mathcal{O}$ (Nutze $\sigma = \{y/\mathcal{O}\}$).

Die Gleichung $\mathsf{minus}(\mathsf{succ}(x), \mathsf{succ}(y)) \equiv_{\mathcal{E}} \mathsf{minus}(x, y)$ kann nun durch die Substitution $\sigma' = \{x/\mathsf{succ}^n(\mathcal{O}), y/\mathsf{succ}^n(\mathcal{O})\}$ zu

$$\mathsf{minus}(\mathsf{succ}^{n+1}(\mathcal{O}), \mathsf{succ}^{n+1}(\mathcal{O})) \equiv_{\mathcal{E}} \mathsf{minus}(\mathsf{succ}^n(\mathcal{O}), \mathsf{succ}^n(\mathcal{O}))$$

verfeinert werden. Zusammen mit der Induktionshypothese $\mathsf{minus}(\mathsf{succ}^n(\mathcal{O}), \mathsf{succ}^n(\mathcal{O})) \equiv_{\mathcal{E}} \mathcal{O}$ erhält man so folgende gleichung:

$$\begin{aligned} minus(\mathsf{succ}^{n+1}(\mathcal{O}), \mathsf{succ}^{n+1}(\mathcal{O})) &\equiv_{\mathcal{E}} \mathsf{minus}(\mathsf{succ}^n(\mathcal{O}), \mathsf{succ}^n(\mathcal{O})) \\ &\equiv_{\mathcal{E}} \mathsf{minus}(\mathsf{succ}^n(\mathcal{O}), \mathsf{succ}^n(\mathcal{O})) \\ &\equiv_{\mathcal{E}} \mathcal{O} \end{aligned}$$

Durch Transitivität von $\equiv_{\mathcal{E}}$ gilt so auch:

$$minus(\mathsf{succ}^{n+1}(\mathcal{O}), \mathsf{succ}^{n+1}(\mathcal{O})) \equiv_{\mathcal{E}} \mathcal{O}$$

Aufgabe 2

- $s \sim_1 t$ gdw. die Anzahl der Funktionssymbole in s gleich der in t ist
  $\sim_1$ ist monoton, aber nicht stabil:
  Falls $\sharp_{sym}(s) = \sharp_{sym}(t)$ dann auch $\sharp_{sym}(q[s]_\pi) = \sharp_{sym}(q) - \sharp_{sym}(q|_\pi) + \sharp_{sym}(s) = \sharp_{sym}(q) - \sharp_{sym}(q|_\pi) + \sharp_{sym}(t) = \sharp_{sym}(q[t]_\pi)$.
  Aber $s = x, t = y, \sigma = \{x/f(a)\}$ ist ein Widerspruch zur Stabilität.

- $s \sim_2 t$ gdw. $\mathcal{V}(s) = \mathcal{V}(t)$
  $\sim_2$ ist stabil und monoton:
  Falls $\mathcal{V}(s) = \mathcal{V}(t)$ dann auch

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(q[s]_\pi) &= \mathcal{V}(q[a]_\pi) \cup \mathcal{V}(s) \\ &= \mathcal{V}(q[a]_\pi) \cup \mathcal{V}(t) \\ &= \mathcal{V}(q[t]_\pi) \end{aligned}$$

  Stabiliät:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(s\sigma) &= (\mathcal{V}(s) \setminus Dom(\sigma)) \cup \bigcup_{x \in Dom(\sigma) \cap \mathcal{V}(s)} \mathcal{V}(\sigma(x)) \\ &= (\mathcal{V}(t) \setminus Dom(\sigma)) \cup \bigcup_{x \in Dom(\sigma) \cap \mathcal{V}(s)} \mathcal{V}(\sigma(x)) \\ &= (\mathcal{V}(t) \setminus Dom(\sigma)) \cup \bigcup_{x \in Dom(\sigma) \cap \mathcal{V}(t)} \mathcal{V}(\sigma(x)) \\ &= \mathcal{V}(t\sigma) \end{aligned}$$

- $s \sim_3 t$ gdw. s ein echter Teilterm von t ist.
  $\sim_3$ ist stabil, aber nicht monoton:
  Stabilität: Falls $t|_\pi = s$ dann ist auch $t\sigma|_\pi = t|_\pi\sigma = s\sigma$
  Keine Monotonie: Die Konstellation $s = x, t = f(x), q = g(x), \pi = 1$ ergibt ein Gegenbeispiel. Denn $t|_1 = s$, aber $q[t]_\pi = g(f(x))$ enthält nicht den Term $q[s]_\pi = g(x)$ als Teilterm.

- $s \sim_4 t$ gdw. s den Term t matcht.
  $\sim_4$ ist weder stabil, noch monoton:
  Keine Stabilität: Wir wählen $s = x, t = a$. Dann gilt $s \sim_4 t$ denn $s\{x/a\} = t$. Aber für $\sigma = \{x/b\}$ matcht $s\sigma = b$ den Term $t\sigma = a$ offensichtlich nicht.
  Keine Monotonie: Ebenso ergibt sich für den Kontext $q = f(x, y)$ und die Position $\pi = 2$, dass $q[s]_\pi = f(x, x)$ nicht den Term $q[t]_\pi = f(x, a)$ matcht.

Aufgabe 3

$$
\begin{aligned}
\emptyset \cup xs &\equiv xs, && (1)\\
(x : xs) \cup ys &\equiv x : (xs \cup ys), && (2)\\[1em]
xs \cup ys &\equiv ys \cup xs, && (3)\\
x : y : ys &\equiv y : x : ys, && (4)\\
x : x : xs &\equiv x : xs, && (5)\\[1em]
(x : xs) \setminus (x : ys) &\equiv xs \setminus (x : ys), && (6)\\
xs \setminus \emptyset &\equiv xs, && (7)\\
\emptyset \setminus xs &\equiv \emptyset && (8)
\end{aligned}
$$

a) Herzuleiten war: $(x : y : xs) \cup (z : y : ys) \leftrightarrow^{*}_{\{(1),(2),(3),(4),(5)\}} x : y : z : (xs \cup ys)$

$$
\begin{aligned}
&\underline{(x : y : xs) \cup (z : y : ys)}\\
&\xrightarrow{2} x : \underline{((y : xs) \cup (z : y : ys))}\\
&\xrightarrow{2} x : y : \underline{(xs \cup (z : y : ys))}\\
&\xrightarrow{3} x : y : \underline{((z : y : ys) \cup xs)}\\
&\xrightarrow{2} x : y : z : \underline{((y : ys) \cup xs)}\\
&\xrightarrow{2} x : y : \underline{z : y : (ys \cup xs)}\\
&\xrightarrow{4} x : \underline{y : y : z : (ys \cup xs)}\\
&\xrightarrow{5} x : y : z : \underline{(ys \cup xs)}\\
&\xrightarrow{3} x : y : z : (xs \cup ys)
\end{aligned}
$$

Wir wählen eine Algebra A' die das Gleichungssystem erfüllt. Sei $A' = (Q, \alpha')$ wobei $Q = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \dots\}$ ist und

$$\begin{array}{lcl} \alpha'_{\cup}(xs, ys) & = & xs \cup ys \\ \alpha'_{:}(x, xs) & = & \{x\} \cup xs \\ \alpha'_{\emptyset} & = & \emptyset \\ \alpha'_{\setminus}(xs, ys) & = & xs \setminus ys \end{array}$$

gilt.
Nun zeigen wir das A' ein Model von $\mathcal{E}$ ist ($A' \models \mathcal{E}$)

$$\begin{array}{lcll}
\emptyset \cup xs & \equiv & xs & \alpha'_{\cup}(\alpha'_{\emptyset}, \beta'(xs)) = \emptyset \cup \beta'(xs) = \beta'(xs) \\
(x : xs) \cup ys & \equiv & x : (xs \cup ys) & \alpha'_{\cup}(\alpha'_{:}(\beta'(x), \beta'(xs)), \beta'(ys)) = \{\beta'(x)\} \cup \beta'(xs) \cup \beta'(ys) = \alpha'_{:}(\beta'(x), \alpha'_{\cup}(\beta'(xs), \beta'(ys)) \\
\\
xs \cup ys & \equiv & ys \cup xs & \alpha'_{\cup}(\beta'(xs), \beta'(ys)) = \beta'(xs) \cup \beta'(ys) = \alpha'_{\cup}(\beta'(ys), \beta'(xs)) \\
x : y : ys & \equiv & y : x : ys & \alpha'_{:}(\beta'(x), (\alpha'_{:}(\beta'(y), \beta'(xs))) = \{\beta'(x)\} \cup \{\beta'(y)\} \cup ys = \alpha'_{:}(\beta'(y), (\alpha'_{:}(\beta'(x), \beta'(xs))) \\
x : x : xs & \equiv & x : xs & \alpha'_{:}(\beta'(x), (\alpha'_{:}(\beta'(x), \beta'(xs))) = \{\beta'(x)\} \cup \{\beta'(x)\} \cup \beta'(xs) = \\
 & & & \{\beta'(x)\} \cup \beta'(ys) = \{\beta'(x)\} \cup \beta'(xs) = \alpha'_{:}(\beta'(x), \beta'(xs)) \\
\\
(x : xs) \setminus (x : ys) & \equiv & xs \setminus (x : ys) & \alpha'_{\setminus}(\alpha'_{:}(\beta'(x), \beta'(xs)), \alpha'_{:}(\beta'(x), \beta'(xs))) = (\{\beta'(x)\} \cup \beta'(xs)) \setminus (\{\beta'(x)\} \cup \beta'(ys)) \\
 & & & = \beta'(xs) \setminus (\{\beta'(x)\} \cup \beta'(ys)) = \alpha'_{\setminus}(\beta'(xs), \alpha'_{:}(\beta'(x), \beta'(xs))) \\
xs \setminus \emptyset & \equiv & xs & \alpha'_{\setminus}(\beta'(xs), \alpha'_{\emptyset}) = \beta'(xs) \setminus \emptyset = \beta'(xs) \\
\emptyset \setminus xs & \equiv & \emptyset & \alpha'_{\setminus}(\alpha'_{\emptyset}, \beta'(xs)) = \emptyset \setminus \beta'(xs) = \alpha'_{\emptyset}
\end{array}$$

Da β' eine beliebige Variableninterpretation ist gilt so $A' \models \mathcal{E}$.

Wir zeigen jetzt das

$$A' \not\models (x : y : \emptyset) \setminus (y : z : \emptyset) \equiv \emptyset$$

wie folgt:

> Sei nun $I' = (Q, \alpha', \beta')$ eine Interpretation zu $A' = (Q, \alpha')$ wobei β' beliebig ist.
>
> $$\begin{aligned}
> &I'((x : y : \emptyset) \setminus (y : z : \emptyset)) = \alpha'_{\setminus}(\alpha'_{:}(\beta'(x), \alpha'_{:}(\beta'(y), \alpha'_{\emptyset})), \alpha'_{:}(\beta'(y), \alpha'_{:}(\beta'(z), \alpha'_{\emptyset})))\\
> &= (\{\beta' x\} \cup \{\beta'(y)\} \cup \emptyset) \setminus (\{\{\beta'(y)\}\} \cup \{\beta'(z)\} \cup \emptyset)\\
> &= (\{\beta'(x), \beta'(y)\} \cup \emptyset) \setminus (\{\beta'(y), \beta'(z)\} \cup \emptyset)\\
> &= (\{\beta'(x), \beta'(y)\} \setminus (\{\beta'(y), \beta'(z)\})\\
> &= \{\beta'(x)\}\\
> &\neq \emptyset\\
> &= \alpha'_{\emptyset}\\
> &= I'(\emptyset)
> \end{aligned}$$

Warum genügt das ? Deswegen: Annahme $(x : y : \emptyset) \setminus (y : z : \emptyset) \leftrightarrow^*_{\mathcal{E}} \emptyset$ gilt. So folgt mit Satz von Birkoff, dass

$$\begin{aligned}
&(x : y : \emptyset) \setminus (y : z : \emptyset) \equiv_{\mathcal{E}} \emptyset\\
&\curvearrowright (\mathcal{E} \models (x : y : \emptyset) \setminus (y : z : \emptyset) \equiv \emptyset)\\
&\curvearrowright \forall A : (A \models \mathcal{E}) \Rightarrow (A \models (x : y : \emptyset) \setminus (y : z : \emptyset) \equiv \emptyset)\\
&\curvearrowright \forall A = (\mathcal{A}, \alpha) : (\forall \beta : (\mathcal{A}, \alpha, \beta) \models \mathcal{E}) \Rightarrow (\forall \beta : (\mathcal{A}, \alpha, \beta) \models (x : y : \emptyset) \setminus (y : z : \emptyset) \equiv \emptyset)\\
&\curvearrowright (\forall \beta : (Q, \alpha', \beta) \models \mathcal{E}) \Rightarrow (\forall \beta : (Q, \alpha', \beta) \models (x : y : \emptyset) \setminus (y : z : \emptyset) \equiv \emptyset)\\
&\curvearrowright (Q, \alpha', \beta') \models (x : y : \emptyset) \setminus (y : z : \emptyset) \equiv \emptyset
\end{aligned}$$

Das widerspricht aber der Erkenntnis von vorher: $I'((x : y : \emptyset) \setminus (y : z : \emptyset)) \neq I'(\emptyset)$ und so gilt die Annahme

$$(x : y : \emptyset) \setminus (y : z : \emptyset) \leftrightarrow^*_{\mathcal{E}} \emptyset$$

nicht.