

Lösungsvorschlag *Termersetzungssysteme* – Blatt 3

Aufgabe 1

- a) Zu zeigen war, dass jede monotone Äquivalenzrelation eine Kongruenzrelation ist:
Sei $s_1 \rightarrow t_1, \dots, s_n \rightarrow t_n$. Dann gilt $f(s_1, \dots, s_n) \rightarrow f(t_1, s_2, \dots, s_n)$ wegen der Monotonie von \rightarrow (Wähle $q = f(x, s_2, \dots, s_n), \pi = 1$). In gleicher Weise erhält man $f(t_1, s_2, \dots, s_n) \rightarrow f(t_1, t_2, s_3, \dots, s_n) \rightarrow \dots \rightarrow f(t_1, \dots, t_n)$. Also gilt $f(s_1, \dots, s_n) \rightarrow^* f(t_1, \dots, t_n)$. Da \rightarrow eine Äquivalenzrelation ist, gilt dann wegen Reflexivität und Transitivität auch $f(s_1, \dots, s_n) \rightarrow f(t_1, \dots, t_n)$.
- b) Ist jede Kongruenzrelation stabil ist? Sei die Relation \sim wie folgt definiert: $s \sim t$ gdw. in s genauso lang ist wie $t \sim$ ist reflexiv, symmetrisch und transitiv. Genauso ist \sim monoton, weil durch hinzufügen eines Kontextes die Länge der beiden Terme s und t gleich wächst. Aus $x \sim a$ folgt aber $x\sigma \sim a\sigma$ für $\sigma = [x/f(a)]$ nicht, weil der Term $f(a)$ nicht gleicher Länge wie a ist. Nicht jede Kongruenzrelation ist stabil.

Aufgabe 2

- a) Zuerst setzen wir voraus, dass für alle Gleichungen $u \equiv v \in \mathcal{E}$ die Beziehung $\mathcal{V}(u) = \mathcal{V}(v)$ gilt. Denn sonst gibt es o.B.d.A. eine Variable $x \in \mathcal{V}(v) \setminus \mathcal{V}(u)$. Dann gilt aber $u \leftrightarrow_{\mathcal{E}} v\{x/x_i\}$ für eine unendliche Menge von Variablen x_i im Widerspruch zur Endlichkeit der Äquivalenzklassen.

Da nun $\mathcal{V}(u) = \mathcal{V}(v)$ gilt und \mathcal{E} endlich ist, kann für jeden Term s die nach Voraussetzung endliche Menge $\{t \mid s \leftrightarrow_{\mathcal{E}} t\}$ effektiv berechnet werden.

Folgender Algorithmus entscheidet dann $s \leftrightarrow_{\mathcal{E}}^* t$.

- (a) Setze $M = \emptyset, N = \{s\}$
- (b) Solange $N \neq \emptyset$
 - i. Wähle ein u aus N .
 - ii. $M = M \cup \{u\}$.
 - iii. $N = N \cup \{v \mid u \leftrightarrow_{\mathcal{E}} v\}$
 - iv. $N = N \setminus M$.
- (c) Falls $t \in M$ gebe Ja, sonst Nein aus.

In der Menge N werden die Menge der neuen noch zu untersuchenden Terme gespeichert, in M stehen alle bereits untersuchten Terme.

Für jeden zu untersuchenden Term u werden alle endlich vielen $\leftrightarrow_{\mathcal{E}}$ Nachfolger berechnet (iii). Alle dabei neu berechneten Terme, die bislang noch nicht untersucht wurden, werden zu N hinzugefügt (iii,iv). In dieser Weise werden nach und nach alle zu s äquivalenten Terme erzeugt. Da die Äquivalenzklassen endlich sind, gibt es irgendwann keine neuen Terme mehr, und N wird schließlich die leere Menge was die Terminierung bedeutet. Dann ist in (c) $M = [s]_{\leftrightarrow_{\mathcal{E}}^*}$ was die Korrektheit der Ausgabe zeigt.

$$\begin{aligned}
(x : xs) \cup ys &\equiv x : (xs \cup ys) \\
xs \cup (y : ys) &\equiv y : (xs \cup ys) \\
x : y : ys &\equiv y : x : ys
\end{aligned}$$

b) Gemäß Aufgabenteil a) reicht es zu zeigen, dass die Äquivalenzklassen von $\equiv_{\mathcal{E}}$ endlich sind. Dies erledigen wir indem wir eine grössere Äquivalenzrelation \sim angeben, die endliche Äquivalenzklassen hat, so dass jede $\equiv_{\mathcal{E}}$ -Äquivalenzklasse vollständig in einer \sim -Klasse liegt. Kurz, wir suchen \sim , so dass für alle Terme t gilt:

$$[t]_{\equiv_{\mathcal{E}}} \subseteq [t]_{\sim} \wedge [t]_{\sim} \text{ endlich}$$

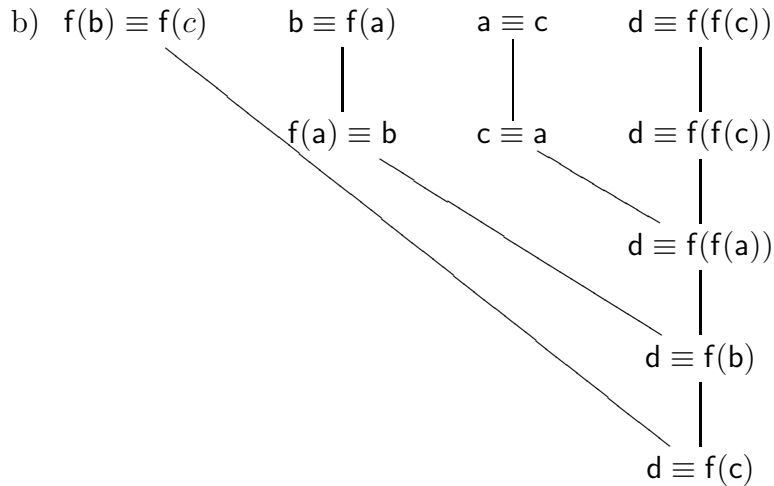
Wir suchen nun nach einem syntaktischem Kriterium, was invariant unter $\leftrightarrow_{\mathcal{E}}^*$ ist und endliche Äquivalenzklassen bildet. Wir betrachten nun verschiedene Möglichkeiten für \sim .

- Gleiche Anzahl von Variablen: Hat keine endlichen Äquivalenzklassen, da man z.B. beliebig viele "x:" einfügen kann.
- Gleiche Anzahl von Funktionssymbolen: Reicht nicht, da die Menge der Terme mit einer bestimmten Anzahl von Funktionssymbolen unendliche ist (Menge der Variablen).
- Gleiche Anzahl von Funktionssymbolen und gleiche Menge von Variablen eines Terms: Man kann leicht zeigen, dass falls $s \leftrightarrow_{\mathcal{E}}^* t$ gilt, auch $s \sim t$ gilt. Zudem ist offensichtlich, dass es nur endlich viele Terme gleicher Anzahl von Funktionssymbolen und mit gleicher Variablenmenge gibt. Also haben wir hiermit ein passendes Kriterium gefunden was mit a) die Entscheidbarkeit von $\equiv_{\mathcal{E}}$ (also auch von $\leftrightarrow_{\mathcal{E}}^*$) zeigt.

Aufgabe 3

a)

$$\underline{d} \rightarrow_{\varepsilon} f(\underline{f(c)}) \leftarrow_{\varepsilon} f(\underline{f(a)}) \leftarrow_{\varepsilon} \underline{f(b)} \rightarrow_{\varepsilon} f(c)$$



c)

Array f				a	b	c	d	Programmzeile	Zwischenschritte
0	1	2	3						
1	2	3	4	0	2	1	0	(Start)	
1	2	3	4	<u>1</u>	2	<u>1</u>	0	a = c	
1	2	<u>3</u>	4	1	2	1	<u>3</u>	d = f[f[c]]	2 = f[c], 3 = f[2]
1	<u>2</u>	<u>2</u>	4	1	2	1	3	f[b] = f[c]	2 = f[c]
1	<u>2</u>	2	4	1	<u>2</u>	1	3	if(b == f[a]){	
1	<u>2</u>	2	4	1	2	1	<u>3</u>	(*)	3 = d, 2 = f[c], f[c] ≠ d

Das Problem liegt an dem destruktiven Update in der Zeile $f[b] = f[c]$. Nach Ausführung dieser Zuweisung kann die vorherige Gleichheit $d = f[f[c]]$ zunichte gemacht werden. Folglich war die einfache Übersetzung des Code-Fragments falsch, da sie Seiteneffekte nicht berücksichtigt hat. Eine korrekte Übersetzung ist möglich, i.a. aber aufwändiger und führt nicht immer zu Grundidentitäten.