

Lösungsvorschlag *Termersetzungssysteme* – Blatt 4

Aufgabe 1

- a) Ein Entscheidungsverfahren für die Allgemeingültigkeit einer Formel φ :
- (a) Ersetze jede Variable x in φ durch eine neue Konstante c_x .
 - (b) Überführe $\neg\varphi$ in disjunktive Normalform (DNF). (und zeige die Unerfüllbarkeit davon)
 - (c) Finde für jedes Konjunkt der Form $u_1 \equiv v_1 \wedge \dots \wedge u_n \wedge \neg s_1 \equiv t_1 \wedge \dots \wedge \neg s_m \equiv t_m$ ein $i \in \{1, \dots, m\}$ mit $s_i \equiv_{\{u_1 \equiv v_1, \dots, u_n \equiv v_n\}} t_i$. Benutze für das Wortproblem von $\equiv_{\{\dots\}}$ den Algorithmus KONGRUENZABSCHLUSS.
 - (d) Falls dies gelingt, gebe JA, sonst NEIN aus.

Die Terminierung des Algorithmus ist offensichtlich. Betrachten wir nun die Korrektheit des Algorithmus

- (a) Die Allgemeingültigkeit einer Formel φ (kurz: $\models \varphi$) ändert sich nicht unter der angegebenen Transformation:
Sei φ_c die Formel nach Ersetzung der Variablen $\{x_1, \dots, x_n\}$. Für jede Interpretation $I = (\mathcal{A}, \alpha, \beta)$ über der ursprünglichen Signatur Σ gibt es eine zugehörige Interpretation $I_c = (\mathcal{A}, \alpha \cup \{(c_{x_1}, \beta(x_1)), \dots, (c_{x_n}, \beta(x_n))\}, \emptyset)$ über $\Sigma \cup \{c_{x_1}, \dots, c_{x_n}\}$ und umgekehrt¹.
Man kann induktiv leicht zeigen, dass $I \models \varphi \Leftrightarrow I_c \models \varphi_c$ gilt. Daraus ergibt sich direkt $\models \varphi \Leftrightarrow \models \varphi_c$.
- (b) Die Allgemeingültigkeit von φ ist offensichtlich äquivalent zur Unerfüllbarkeit von $\neg\varphi$ und die Überführung zur DNF ändert die Semantik einer Formel nicht.
- (c) Die Unerfüllbarkeit von $\varphi_1 \vee \dots \vee \varphi_n$ ist äquivalent zur Unerfüllbarkeit aller φ_i . Daher ergibt sich der Schritt “Für jedes Konjunkt ...”.
Die Unerfüllbarkeit eines Konjunks der Form $u_1 \equiv v_1 \wedge \dots \wedge u_n \equiv v_n \wedge \neg s_1 \equiv t_1 \wedge \dots \wedge \neg s_m \equiv t_m$ ist wegen des Lemmas unmittelbar äquivalent zur Unerfüllbarkeit einer der Formeln $u_1 \equiv v_1 \wedge \dots \wedge u_n \equiv v_n \wedge \neg s_i \equiv t_i$. Daraus ergibt sich das “Finde ein $i \in \{1, \dots, m\}$ ”.

¹Sei $I \models \varphi_c$ mit $I = (\mathcal{A}, \alpha, \beta)$ so gibt es eine Interpretation $I_{\mathcal{V}}$ für φ , so daß $I_{\mathcal{V}} \models \varphi$ folgt, der folgenden Form: $I_{\mathcal{V}} = (\mathcal{A}, \alpha, \beta')$ mit $\beta'(x) = \beta(x)$ für $x \notin \mathcal{V}(\varphi)$ und $\beta'(x) = \alpha_{c_x}$ für $x \in \mathcal{V}(\varphi)$.

Die Unerfüllbarkeit von $\psi_i = u_1 \equiv v_1 \wedge \dots \wedge u_n \equiv v_n \wedge \neg s_i \equiv t_i$ ist auch äquivalent zu $s_i \equiv_{\{u_1 \equiv v_1, \dots, u_n \equiv v_n\}} t_i$.

- Denn falls $s_i \equiv_{\{u_1 \equiv v_1, \dots, u_n \equiv v_n\}} t_i$ gilt, dann gilt für alle Algebren, die Modelle von $u_1 \equiv v_1, \dots, u_n \equiv v_n$ sind, dass sie auch Modell von $s_i \equiv t_i$ sind. Also ist ψ_i unerfüllbar.
- Gilt hingegen $s_i \equiv_{\{u_1 \equiv v_1, \dots, u_n \equiv v_n\}} t_i$ nicht, so gibt es eine Algebra A , die Modell von $u_1 \equiv v_1, \dots, u_n \equiv v_n$, aber nicht von $s_i \equiv t_i$ ist. Folglich ist A ein Modell von ψ_i , also ist ψ_i erfüllbar.

b) Wir wenden nun den Algorithmus auf

$$\neg(x \equiv f(f(x)) \wedge x \equiv f(f(f(f(x)))))) \vee x \equiv f(x)$$

an, um die Allgemeingültigkeit dieser Formel zu entscheiden.

- Ersetzung der Variable x durch c_x liefert die Allgemeingültigkeits-äquivalente Formel

$$\neg(c_x \equiv f(f(c_x)) \wedge c_x \equiv f(f(f(f(c_x)))))) \vee c_x \equiv f(c_x)$$

- Negierung und Überführung in DNF führt zum Unerfüllbarkeitsproblem von

$$c_x \equiv f(f(c_x)) \wedge c_x \equiv f(f(f(f(c_x)))) \wedge \neg c_x \equiv f(c_x)$$

- Dies ist gleichbedeutend zu $c_x \equiv_{\mathcal{E}} f(c_x)$ für $\mathcal{E} = \left\{ \begin{array}{l} c_x \equiv f(f(c_x)), \\ c_x \equiv f(f(f(f(c_x)))) \end{array} \right\}$
- Beim Nachweis mit dem Kongruenzabschlussverfahrens ergeben sich die Mengen

- $L_0 = \{ \{c_x, f(f(c_x)), f(f(f(f(c_x))))\}, \{f(c_x)\}, \{f(f(f(c_x)))\}, \{f(f(f(f(c_x))))\} \}$
- $K_1 = L_0 \cup \{ \{f(c_x), f(f(f(c_x)))\} \} \cup \dots$
- $L_1 = \{ \{c_x, f(f(c_x)), f(f(f(f(c_x))))\}, \{f(c_x), f(f(f(c_x)))\}, \{f(f(f(f(c_x))))\} \}$
- $K_2 = L_1 \cup \{ \{f(c_x), f(f(f(c_x)))\}, \{f(f(c_x)), f(f(f(f(c_x))))\}, \} \cup \dots$
- $L_2 = \{ \{c_x, f(f(c_x)), f(f(f(f(c_x))))\}, f(f(f(f(f(c_x))))\}, \{f(c_x), f(f(f(c_x)))\} \}$
- $K_3 = L_2 \cup \{ \{f(c_x), f(f(f(c_x)))\}, \{f(c_x), f(f(f(f(f(c_x))))\}, \{f(f(f(c_x))), f(f(f(f(f(c_x))))\}, \{f(f(c_x)), f(f(f(f(c_x))))\}, \} \cup \dots$
- $L_3 = \{ \{c_x, f(c_x), f(f(c_x)), f(f(f(c_x))), f(f(f(f(c_x))))\}, f(f(f(f(f(c_x))))\} \}$

Also gilt $c_x \equiv_{\mathcal{E}} f(c_x)$.

Folglich ist die Eingabe-Formel allgemeingültig.

- *) Sei $\varphi = u_1 \equiv v_1 \wedge \dots \wedge u_n \equiv v_n$, sei $\psi_i = \varphi \wedge \neg s_i \equiv t_i$, sei $\psi = \varphi \wedge \neg s_1 \equiv t_1 \wedge \dots \wedge \neg s_m \equiv t_m$. Die Aussage des Lemmas ist: Genau dann wenn ψ unerfüllbar ist gibt es ein i so daß ψ_i unerfüllbar ist.

Das Lemma kann folgendermaßen umformuliert werden:
Genau dann wenn ψ erfüllbar ist, sind alle ψ_i erfüllbar.

\Rightarrow : Sei A eine Algebra mit $A \models \psi$, so folgt dass $A \models \psi_i$ weil ψ_i nur einige der Konjunktionen von ψ übernimmt.

\Leftarrow : Seien nun $A_i = (\mathcal{A}_i, \alpha_i)$ Algebren, so dass $A_i \models \psi_i$ gilt. Da keine Variablen vorhanden sind, kann man schon mittels der Algebra Terme auf Elemente des Universums eindeutig abbilden. Man braucht nicht die Variablenbelegung aus der Interpretationen. Deshalb schreiben wir hier auch $A(t)$ wie wir sonst $I(t)$ schreiben.

Wir definieren $A = (\mathcal{A}_1 \times \dots \times \mathcal{A}_m, \alpha)$ mit

$$\begin{aligned} & \alpha(\mathbf{f})((a_{1,1}, \dots, a_{m,1}), \dots, (a_{1,n}, \dots, a_{m,n})) \\ &= (\alpha_1(\mathbf{f})(a_{1,1}, \dots, a_{1,n}), \dots, \alpha_m(\mathbf{f})(a_{m,1}, \dots, a_{m,n})) \end{aligned}$$

für jedes n -stellige Funktionssymbol \mathbf{f} . Man kann nun induktiv über den Termaufbau zeigen, dass für jeden Term t der Zusammenhang $A(t) = (A_1(t), \dots, A_m(t))$ gilt.

Weil $A_i \models \psi_i$ gilt, erhalten wir für jedes $j \in \{1, \dots, n\}$ die Gleichheit

$$A(u_j) = (A_1(u_j), \dots, A_m(u_j)) = (A_1(v_j), \dots, A_m(v_j)) = A(v_j)$$

und für jedes $i \in \{1, \dots, m\}$ den Zusammenhang

$$A(s_i) = (A_1(s_i), \dots, A_m(s_i)) \neq (A_1(t_i), \dots, A_m(t_i)) = A(t_i)$$

da bereits $A_i(s_i) \neq A_i(t_i)$ gilt. Also ist A ein Modell von $\psi = u_1 \equiv v_1 \wedge \dots \wedge u_n \equiv v_n \wedge \neg s_1 \equiv t_1 \wedge \dots \wedge \neg s_m \equiv t_m$.

Aufgabe 2

$S = \{a, b, c, d, f(a), f(b), f(d), f(f(a)), g(a), g(b), g(c), g(d)\}$.

L_i bezeichnet die Menge L vor Schritt 4 im i -ten Durchlauf, K_{i+1} ist die zugehörige Menge K direkt nach Schritt 4. Die hier nicht relevanten einelementigen Mengen sind mit \dots abgekürzt.

- $L_0 = \{\{a, f(b), g(a)\}, \{c, d, g(d)\}, \{f(d), g(b)\}, \{f(f(a))\}, \{g(c)\}, \dots\}$
- $K_1 = L_0 \cup \{\{g(c), g(d)\}\} \cup \dots$
- $L_1 = \{\{a, f(b), g(a)\}, \{c, d, g(c), g(d)\}, \{f(c), f(d), g(b)\}, \{f(f(a))\}, \dots\}$
- $K_2 = L_1 \cup \{\{g(c), g(d)\}\} \cup \dots$
- Nach Vereinigung ergibt sich $K_2 = L_1$, also sind wir fertig.

Da $g(c)$ und $f(f(a))$ in der finalen Menge L_1 in unterschiedlichen Mengen liegen, gilt $g(c) \not\equiv_{\mathcal{E}} f(f(a))$.

Aufgabe 3

$$\mathcal{R} = \left\{ \begin{array}{l} f(f(f(f(x)))) \rightarrow x, \\ f(f(f(x))) \rightarrow x, \\ g(x) \rightarrow x \end{array} \right\} \quad \mathcal{E} = \left\{ \begin{array}{l} g(g(g(x))) \equiv g(g(x)), \\ f(x) \equiv g(g(x)), \\ x \equiv f(f(f(x))) \end{array} \right\}$$

- \mathcal{R} ist korrekt für \mathcal{E} :
 - $g(\underline{x}) \rightarrow_{\mathcal{E}} \underline{g(f(f(x)))} \rightarrow_{\mathcal{E}} \underline{g(g(f(x)))} \rightarrow_{\mathcal{E}} \underline{g(g(g(x)))} \rightarrow_{\mathcal{E}} \underline{g(g(g(g(x))))} \rightarrow_{\mathcal{E}} \underline{g(g(g(g(x))))} \rightarrow_{\mathcal{E}} \underline{g(g(g(g(x))))} \leftarrow_{\mathcal{E}} \underline{g(g(f(x)))} \leftarrow_{\mathcal{E}} \underline{f(f(x))} \leftarrow_{\mathcal{E}} x$
 - $f(\underline{f(f(x))}) \rightarrow_{\mathcal{E}} \underline{f(f(g(g(x))))} \rightarrow_{\mathcal{E}} \underline{f(g(g(g(x))))} \rightarrow_{\mathcal{E}} \underline{g(g(g(g(g(x))))} \rightarrow_{\mathcal{E}} \underline{g(g(g(g(g(x))))} \rightarrow_{\mathcal{E}} \dots$
 - $f(\underline{f(f(f(x))))} \leftarrow_{\mathcal{E}} \underline{f(f(f(x)))} \rightarrow_{\mathcal{E}} \dots$
- \mathcal{R} ist adäquat für \mathcal{E} :
 - $g(\underline{g(g(x))}) \rightarrow_{\mathcal{R}} \underline{g(g(x))}$
 - $\underline{f(x)} \leftarrow_{\mathcal{R}} \underline{f(f(f(x)))} \leftarrow_{\mathcal{R}} \underline{f^7(x)} \leftarrow_{\mathcal{R}} \underline{f^{10}(x)} \rightarrow_{\mathcal{R}} \underline{f^5(x)} \rightarrow_{\mathcal{R}} \underline{x} \leftarrow_{\mathcal{R}} \underline{g(x)} \leftarrow_{\mathcal{R}} \underline{g(g(x))}$
 - $\underline{x} \leftarrow_{\mathcal{R}} \underline{f^5(x)} \leftarrow_{\mathcal{R}} \underline{f^{10}(x)} \rightarrow_{\mathcal{R}} \underline{f^7(x)} \rightarrow_{\mathcal{R}} \underline{f(f(f(x)))} \rightarrow_{\mathcal{R}} \underline{f(x)} \leftarrow_{\mathcal{R}} \underline{f^6(x)} \leftarrow_{\mathcal{R}} \underline{f^{11}(x)} \rightarrow_{\mathcal{R}} \underline{f^8(x)} \rightarrow_{\mathcal{R}} \underline{f^5(x)} \rightarrow_{\mathcal{R}} \underline{f(f(x))}$