Lösungsvorschlag *Termersetzungssysteme* – Blatt 5

Aufgabe 1

- Wenn $\rightarrow_1 \supseteq \rightarrow_2$ gilt, dann folgt offensichtlich aus der Fundiertheit von $\rightarrow_1$ die von $\rightarrow_2$
  Intuitiv: "Weglassen von Verbindungen" macht eine Relation nur fundierter, also hat $\rightarrow_1$ "mehr Verbindungen" als $\rightarrow_2$.

  - $\rightarrow^+$ fundiert $\Rightarrow$ $\rightarrow$ fundiert (Obermenge)
  - $\rightarrow^+$ fundiert $\Rightarrow$ $\rightarrow^{*,\neq}$ fundiert (Obermenge)
  - $\rightarrow^{*,\neq}$ fundiert $\not\Rightarrow$ $\rightarrow$ fundiert ($\rightarrow = \{(a,a)\}, \rightarrow^{*,\neq} = \emptyset$)
  - $\rightarrow^{*,\neq}$ fundiert $\not\Rightarrow$ $\rightarrow^+$ fundiert ($\rightarrow = \{(a,a)\}, \rightarrow^{*,\neq} = \emptyset, \rightarrow^+ = \{(a,a)\}$)
  - $\rightarrow$ fundiert $\Rightarrow$ $\rightarrow^+$ fundiert
    Angenommen, $a_1 \rightarrow^+ a_2 \rightarrow^+ a_3 \rightarrow \dots$, dann gilt $a_1 \rightarrow b_{1,1} \rightarrow \dots \rightarrow b_{1,n_1} \rightarrow a_2 \rightarrow b_{2,1} \rightarrow \dots \rightarrow b_{2,n_2} \rightarrow a_3 \rightarrow \dots$
  - $\rightarrow$ fundiert $\Rightarrow$ $\rightarrow^{*,\neq}$ fundiert ($\rightarrow$ fundiert $\Rightarrow$ $\rightarrow^+$ fundiert $\rightarrow^{*,\neq}$ fundiert)

- Zur Erinnerung:

  $\rightarrow$ ist konfluent, gdw.
  für alle t mit $t \rightarrow^* u, t \rightarrow^* v$ ein s existiert, so daß $u \rightarrow^* s$ und $v \rightarrow^* s$ gilt.

  In Mengenschreibweise: $\leftarrow^* \circ \rightarrow^* \subseteq \rightarrow^* \circ \leftarrow^*$
  also $\{(x,z) | x \leftarrow^* y, y \rightarrow^* z\} \subseteq \{(x,z) | x \rightarrow^* y, y \leftarrow^* z\}$
  weil $R \circ S = \{(x,z) | (x,y) \in R, (y,z) \in S\}$

  Nun gilt aber offensichtlich $\rightarrow^* = (\rightarrow^+)^* = (\rightarrow^{*,\neq})^*$, was die Äquivalenz der Konfluenz der drei Relationen $\rightarrow, \rightarrow^+, \rightarrow^{*,\neq}$ zeigt.

Aufgabe 2

a) $<_{c,d}$ ist fundiert: Alle reellen Zahlen aus dem Interval $(c-d,c)$ sind Normalformen. Sei $z \in (c-d,c)$ und $y \in \mathbb{R}$ so folgt:

$$\begin{array}{rlcl}
 & z \in (c-d,c) & \wedge & (z <_{c,d} y) \\
\Longrightarrow & (c-d < z < c) & \wedge & (0 < z < z+d < y < c) \\
\Longrightarrow & (c-d < z < c) & \wedge & (z < z+d) \wedge (z+d < y < c) \\
\Longrightarrow & (c-d < z < c) & \wedge & (0 < d) \wedge (z+d < y < c) \\
\Longrightarrow & (c < z+d < c+d) & \wedge & (0 < d) \wedge (z+d < y < c) \\
\Longrightarrow & (c < z+d < y < c) & & \\
\Longrightarrow & \text{der Nachfolger } y \text{ kann nicht existieren} & &
\end{array}$$

Also ist $z \in (c-d,c)$ eine Normalform. Wegen

$$\begin{array}{rl}
 & (x <_{c,d} y) \\
\Longrightarrow & (0 < x < x+d < y < c) \\
\Longrightarrow & (x < x+d) \wedge (x+d < y) \\
\Longrightarrow & (0 < d) \wedge (x+d < y)
\end{array}$$

muß außerdem jeder Nachfolger y zu x mindestens den Abstand d einhalten. Also wird bei jedem Schritt der Relation $<_{c,d}$ mindestens die Distanz d überschritten. Jedes $x \in (0,c)$ ist damit maximal $\lfloor (c-x)/d \rfloor$ Schritte von einer Normalform entfernt.

$<_{c,d}$ ist nicht konfluent: Es gilt $8 <_{10,1} 9.5$ und $8 <_{10,1} 9.6$ und $9.5, 9.6 \in (9,10)$. Also sind die Normalformen $9.5, 9.6$ Nachfolger von 8.
Beachte: Natürlich ist die Relation $<_{c,d}$, wenn $0 \geq c$, $0 \geq d$ oder $d \geq c \geq 0$ gilt, konfluent weil die Relation dann leer ist, aber $<_{c,d}$ ist eben nicht für alle $c, d \in \mathbb{R}$ konfluent.

b) $>_{lex}$ ist nicht fundiert: $b >_{lex} ab >_{lex} aab >_{lex} aaab >_{lex} \ldots$

$>_{lex}$ ist konfluent: Aus $w >_{lex} w_1$ und $w >_{lex} w_2$ folgt entweder, daß $w_1 >_{lex} w_2$ oder daß $w_2 >_{lex} w_1$ weil $>_{lex}$ eine totale Ordnung ist.

c) $\sim$ ist nicht fundiert: Sei $v_1 \sim v_2$ so gibt es die Pfade von v_1 nach v_2 und von v_2 nach v_1. Also gibt es umgekehrt auch die Pfade von v_2 nach v_1 und von v_1 nach v_2, so daß auch $v_2 \sim v_1$ gilt und damit die unendliche Folge $v_1 \sim v_2 \sim v_1 \sim v_2 \sim \ldots$ existiert.

$\sim$ ist konfluent: Sei $v_1 \sim v_2$ und $v_1 \sim v_3$ so gilt auch $v_2 \sim v_3$. Denn wenn es die Pfade zwischen v_1 und v_2 und zwischen v_1 und v_3 gibt, so gibt es auch Pfade zwischen v_2 und v_3

Aufgabe 3

$$\begin{aligned}
\mathsf{a} &\to \mathsf{f}(\mathsf{a})\\
\mathsf{f}(x) &\to \mathsf{g}(x)\\
\mathsf{g}(\mathsf{b}) &\to \mathsf{b}\\
\mathsf{a} &\to \mathsf{b}\\
\mathsf{a} &\to \mathsf{c}
\end{aligned}$$

- $\mathcal{R}$ ist normalisierend: Induktion über den Aufbau von Term t:

  $t \in \mathcal{V}$: Jede Variable ist bereits in Normalform.
  $t = \mathsf{b}$: b ist bereits Normalform.
  $t = \mathsf{c}$: c ist bereits Normalform.
  $t = \mathsf{a}$: a hat die Normalformen b und c.
  $t = \mathsf{g}(t')$: t' hat bereits die Normalform u (wegen $t \rhd t'$) und so folgt:
    $u = \mathsf{b}$: So gilt $\mathsf{g}(\mathsf{b}) \to_{\mathcal{R}} \mathsf{b}$, wobei b eine Normalform ist.
    $u \neq \mathsf{b}$: So ist $\mathsf{g}(u)$ bereits eine Normalform.
  $t = \mathsf{f}(t')$: Wegen $\mathsf{f}(t') \to_{\mathcal{R}}^* \mathsf{g}(t')$ hat t dieselbe Normalform wie $\mathsf{g}(t')$.

- $\mathcal{R}$ ist nicht eindeutig normalisierend: Der Term a hat zwei verschiedene Normalformen b und c.

- $\mathcal{R}$ ist nicht fundiert: $a \to_{\mathcal{R}} \mathsf{f}(\mathsf{a}) \to_{\mathcal{R}} \mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{a})) \to_{\mathcal{R}} \ldots$

- $\mathcal{R}$ ist nicht konfluent: Dies folgt schon daraus, dass $\mathcal{R}$ nicht eindeutig normalisierend ist (denn zwei unterschiedliche Normalformen sind offensichtlich nicht zusammenführbar).

Nachtrag zu Übung 4

Sei ψ unsere implizit all-quantifizierte Formel und ψ_{c} die passende Formel mit je einer neuen Konstanten pro Variable aus ψ.

- Für jede Interpretation $I = (\mathcal{A}, \alpha, \beta)$ über der ursprünglichen Signatur Σ gibt es eine zugehörige Interpretation

  $$I_{\mathsf{c}} = (\mathcal{A}, \alpha \cup \{(\mathsf{c}_{x_1}, \beta(x_1)), \dots, (\mathsf{c}_{x_n}, \beta(x_n))\}, \emptyset)$$

  über $\Sigma \cup \{\mathsf{c}_{x_1}, \dots, \mathsf{c}_{x_n}\}$ so daß

  $$I \models \psi \Longrightarrow I_{\mathsf{c}} \models \psi_{\mathsf{c}}$$

  gilt.

- Für jede Interpretation $I = (\mathcal{A}, \alpha, \beta)$ über der erweiterten Signatur $\Sigma \cup \{\mathsf{c}_{x_1}, \dots, \mathsf{c}_{x_n}\}$ gibt es eine Interpretation $I_{\mathcal{V}}$ für φ, der Form:

  $I_{\mathcal{V}} = (\mathcal{A}, \alpha, \beta')$
  $\beta'(x) = \beta(x)$ für $x \notin \mathcal{V}(\varphi)$
  $\beta'(x) = \alpha_{\mathsf{c}_x}$ für $x \in \mathcal{V}(\varphi)$

  so daß

  $$I \models \psi_{\mathsf{c}} \Longrightarrow I_{\mathcal{V}} \models \psi$$

  gilt.

Also sind ψ und ψ_{c} erfüllbarkeitsäquivalent.