Lösungsvorschlag *Termersetzungssysteme* – Blatt 6

Aufgabe 1

a) Zunächst setzen wir $\mathsf{c}(\mathsf{a}(x)) \to \mathsf{a}(x)$, da unser TES sonst nicht terminiert (weil die linke Seite als Teilterm auf der rechten Seite vorkäme).

Aus demselben Grund setzen wir $\mathsf{b}(x) \to \mathsf{a}(\mathsf{d})$, denn eine rechte Seite mit Variablen, welche auf der linken nicht vorkommen, verhindert die Terminierung.

Wegen der vorhergehenden Richtung müssen wir $\mathsf{c}(\mathsf{d}) \to \mathsf{b}(\mathsf{d})$ setzen, sonst ist das TES nicht konfluent, denn $\mathsf{a}(\mathsf{d})$ ist eine Normalform und von $\mathsf{c}(\mathsf{d})$ kämen wir nicht zu $\mathsf{a}(\mathsf{d})$.

Jetzt verlangt die Fundiertheit, dass wir $\mathsf{b}(\mathsf{c}(x)) \to \mathsf{b}(\mathsf{b}(x))$ setzen, sonst hätten wir nämlich $\mathsf{b}(\mathsf{b}(\mathsf{d})) \to \mathsf{b}(\mathsf{c}(\mathsf{d})) \to \mathsf{b}(\mathsf{b}(\mathsf{d})) \to \ldots$.

Schließlich setzen wir $\mathsf{e}(x) \to \mathsf{b}(x)$, damit das TES konfluent bleibt, denn von $\mathsf{e}(x)$ kämen wir sonst nicht zu der anderen Normalform ($\mathsf{a}(\mathsf{d})$) von $\mathsf{b}(x)$.

b) Für den Test auf Äquivalenz werten wir einfach aus. Dabei lassen wir aus Bequemlichkeit die Klammern weg. Bei einstelligen Funktionssymbolen sorgt das nicht für Zweideutigkeiten. Wir werten nun einfach irgendwie aus, immerhin soll unser TES ja konvergent sein:

$$\underline{\mathsf{caabeebcd}} \to \mathsf{aa}\underline{\mathsf{beebcd}} \to \mathsf{aaad}$$

$$\underline{\mathsf{cabaecaad}} \to \mathsf{a}\underline{\mathsf{baecaad}} \to \mathsf{aad}$$

Diese zwei Normalformen sind nicht gleich, die Terme sind also auch nicht äquivalent. Weiter mit dem nächsten Term:

$$\underline{\mathsf{cabaeeccd}} \to \mathsf{a}\underline{\mathsf{baeeccd}} \to \mathsf{aad}$$

$$\mathsf{a}\underline{\mathsf{eeeeeecd}} \to \mathsf{a}\underline{\mathsf{beeeeecd}} \to \mathsf{aad}$$

Diese beiden Normalformen sind gleich. Damit sind die Terme äquivalent.

Aufgabe 2

a)

T_1	T_2
$\mathsf{f(f(f(a,a),a),f(a,a))}$	$\mathsf{f(a,a)}$
$\mathsf{f(f(a,a),f(a,a))}$	$\emptyset$
$\mathsf{f(f(f(a,a),a),f(a,a))}$	$\emptyset$

Abbruch mit FALSE, da die rechte Seite der ersten Regel ein Teilterm des in T_1 erhaltenen Terms ist.

b)

<table>
<tr><th>T_1</th><th>T_2</th><th>T_3</th><th>T_4</th><th>T_5</th><th>T_6</th></tr>
<tr><td>$\mathsf{f(f(a,b),c)}$</td><td>$\mathsf{f(a,f(c,b))}$</td><td>$\mathsf{f(}b\mathsf{,a)}$</td><td>$\mathsf{f(a,a)}$</td><td>$\mathsf{f(c,b)}$</td><td>c</td></tr>
<tr><td>$\mathsf{f(f(b,a),c),f(c,c)}$</td><td>$\mathsf{c}$</td><td>$\mathsf{f(a,a),f(c,b)}$</td><td>$\mathsf{f(c,b),c}$</td><td colspan="2">$\emptyset$</td></tr>
<tr><td>$\mathsf{f(f(a,a),c),f(f(c,b),c)}$</td><td>$\emptyset$</td><td>$\mathsf{f(c,b),c}$</td><td colspan="3">$\emptyset$</td></tr>
<tr><td>$\mathsf{f(f(c,b),c),f(c,c),f(a,f(c,b))}$</td><td colspan="5">$\emptyset$</td></tr>
<tr><td>$\mathsf{f(a,f(c,b)),c}$</td><td colspan="5">$\emptyset$</td></tr>
<tr><td>c</td><td colspan="5">$\emptyset$</td></tr>
<tr><td colspan="6">$\emptyset$</td></tr>
</table>

Ausgabe TRUE, da wir lauter leere Mengen erhalten haben.

Aufgabe 3

a) o und e stehen für ODD und EVEN, denn die 0 ist gerade (also even, nicht odd), ferner ist der Nachfolger einer geraden Zahl ungerade und der Nachfolger einer ungeraden Zahl gerade.

Für eine Eingabe $x = \mathsf{s}^n(\mathsf{0})$ berechnet f die nächstkleinere gerade Zahl, also $\mathsf{f}(x) = x$ für x gerade und $\mathsf{f}(x) = \mathsf{s}^{n-1}(\mathsf{0})$ für x ungerade. Begründung:

$$\mathsf{f}(\mathsf{s}^{2n}(\mathsf{0})) = \mathsf{s}^2(\mathsf{f}(\mathsf{s}^{2n-2}(\mathsf{0}))) = \ldots \mathsf{s}^{2n}(\mathsf{f}(\mathsf{0})) = \mathsf{s}^{2n}(\mathsf{0})$$

$$\mathsf{f}(\mathsf{s}^{2n+1}(\mathsf{0})) = \ldots \mathsf{s}^{2n}(\mathsf{f}(\mathsf{s}(\mathsf{0}))) = \mathsf{s}^{2n}(\mathsf{0})$$

b) Es bietet sich die Relation $a >_2 b$ an, die auf $\mathbb{N}$ sicher fundiert ist. Dabei ist $a >_2 b$ gdw $a = b + 2$.

Dann ist $\varphi(n)$ die Aussage, dass $\mathsf{e}(\mathsf{f}(\mathsf{s}^n(\mathsf{0}))) \to^*_{\mathcal{R}} \mathsf{true}$.

Nach NOETHER ist zu zeigen: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: Wenn $\varphi(k)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $n >_2 k$, so gilt auch $\varphi(n)$. Fallunterscheidung nach n:

Fall $n = 0$: Dann ist $\mathsf{e}(\mathsf{f}(\mathsf{0})) \to \mathsf{e}(\mathsf{0}) \to \mathsf{true}$, also gilt $\varphi(0)$.

Fall $n = 1$: Dann ist $\mathsf{e}(\mathsf{f}(\mathsf{s}(\mathsf{0}))) \to \mathsf{e}(\mathsf{0}) \to \mathsf{true}$, also gilt $\varphi(1)$.

Fall $n \geq 2$: Dann schreibe n als $n' + 2$. Es ist dann

$$\mathsf{e}(\mathsf{f}(\mathsf{s}^{n'+2}(\mathsf{0}))) \to \mathsf{e}(\mathsf{s}^2(\mathsf{f}(\mathsf{s}^{n'}(\mathsf{0})))) \to \mathsf{o}(\mathsf{s}(\mathsf{f}(\mathsf{s}^{n'}(\mathsf{0})))) \to \mathsf{e}(\mathsf{f}(\mathsf{s}^{n'}(\mathsf{0}))) \to^* \mathsf{true}$$

mit der Induktionshypothese, da $n >_2 n'$.