

# Lösungsvorschlag *Termersetzungssysteme* – Blatt 7

## Aufgabe 1

- a) Zu zeigen: Aus  $s \triangleright t$  folgt  $s \succ_{emb} t$ .

$s \triangleright t$  bedeutet  $s|_{\pi} = t$  für ein  $\pi \in Occ(s)$  und  $\pi \neq \varepsilon$ . Wir beweisen die Behauptung daher mittels Induktion über  $\pi$ .

Für  $\pi = i$  mit  $i \in \mathbb{N}$  ist  $s = f(s_1, \dots, s_i = t, \dots, s_n)$ . Damit gilt aber per Definition auch  $s \succ_{emb} t$ .

Ansonsten gilt  $\pi = i\pi'$ . Dann ist  $s|_{\pi} = f(s_1, \dots, s_n)|_{i\pi'} = s_i|_{\pi'} = t$ . Hierauf wenden wir die Induktionshypothese an und erhalten  $s_i \succ_{emb} t$ . Dann gilt aber auch  $s \succ_{emb} t$  da  $s = f(s_1, \dots, s_n)$  und  $s_i \succeq_{emb} t$  für ein  $1 \leq i \leq n$ .

- b) Beweis der *Stabilität*. Beweis mittels Noetherscher Induktion über  $\triangleright$ . Es gelte  $s \succ_{emb}^{\triangleright} t$ . Falls  $s \triangleright t$  gilt, gilt auch  $s\sigma \triangleright t\sigma$ , da die Teiltermrelation stabil ist (vgl. vorhergehende Übungblätter). Dann gilt auch  $s\sigma \succ_{emb}^{\triangleright} t\sigma$ .

Ansonsten ist  $s = f(s_1, \dots, s_n)$  und  $t = f(t_1, \dots, t_n)$  mit  $s_i \succ_{emb}^{\triangleright} t_i$  für ein  $i$  und  $s_j \succeq_{emb}^{\triangleright} t_j$  für  $j \neq i$ . Da  $s \triangleright s_k$  für alle  $s_k$ , ist mit der Induktionshypothese  $s_i\sigma \succ_{emb}^{\triangleright} t_i\sigma$  und  $s_j\sigma \succeq_{emb}^{\triangleright} t_j\sigma$  für eine Substitution  $\sigma$ . Damit ist

$$s\sigma = f(s_1\sigma, \dots, s_n\sigma) \succ_{emb}^{\triangleright} f(t_1\sigma, \dots, t_n\sigma) = t\sigma$$

und  $\succ_{emb}^{\triangleright}$  ist stabil.

Beweis der *Monotonie*. Sei  $q$  ein beliebiger Term. Wir zeigen die Aussage mittels Induktion über die Stelle  $\pi$ . Für  $s \succ_{emb}^{\triangleright} t$  und  $\pi = \varepsilon$  ist dann nichts zu zeigen. Ansonsten ist  $\pi = i\pi'$  und wir haben

$$S := q[s]_{i\pi'} = f(q_1, \dots, q_i[s]_{\pi'}, \dots, q_n)$$

$$T := q[t]_{i\pi'} = f(q_1, \dots, q_i[t]_{\pi'}, \dots, q_n)$$

Nun ist  $S = f(S_1, \dots, S_n)$  und  $T = f(T_1, \dots, T_n)$ . Für  $j \neq i$  gilt  $S_j = T_j$  also auch  $S_j \succeq_{emb}^{\triangleright} T_j$ . Für  $i$  ist  $S_i = q_i[s]_{\pi'}$  und analog für  $T_i$ . Die Induktionshypothese liefert dann aber  $S_i \succ_{emb}^{\triangleright} T_i$  und wir haben  $S \succ_{emb}^{\triangleright} T$  per Definition.

## Aufgabe 2

- a) Angenommen, für das TES  $\mathcal{R}$  gibt es eine Reduktionsordnung  $\succ$ . Dann ist  $\succ$  insbesondere ein Reduktionsrelation. Laut Vorlesung terminiert dann  $\mathcal{R}$ .

Angenommen, das TES  $\mathcal{R}$  terminiert. Setze  $\succ = \rightarrow_{\mathcal{R}}^+$ . Zu zeigen:  $\succ$  ist Reduktionsordnung. Aus Vorlesung bekannt:  $\rightarrow_{\mathcal{R}}$  ist Reduktionsrelation, also  $\rightarrow_{\mathcal{R}}$  fundiert, stabil und monoton. Aus vorletztem Übungsblatt bekannt: Dann ist auch  $\rightarrow_{\mathcal{R}}^+$  fundiert. Offensichtlich ist  $\rightarrow_{\mathcal{R}}^+$  auch stabil und monoton (folgt direkt aus entsprechenden Eigenschaften von  $\rightarrow_{\mathcal{R}}$ ). Damit ist auch  $\rightarrow_{\mathcal{R}}^+$  eine Reduktionsrelation. Da  $\rightarrow_{\mathcal{R}}^+$  ferner per Definition transitiv ist, ist  $\rightarrow_{\mathcal{R}}^+$  eine Reduktionsordnung.

- b) Setze  $\succ = \triangleleft \cup \triangleright$ , also auf den *symmetrischen Abschluß* der Teiltermrelation. Da für jeden Term  $s$  weder  $s \triangleleft s$  noch  $s \triangleright s$  gilt, ist  $\succ$  irreflexiv. Da  $\triangleleft$  und  $\triangleright$  stabil, ist auch  $\succ$  stabil. Ferner gilt trivialerweise  $\triangleright \subseteq \succ$ .

$\succ$  erfüllt demnach die geforderten Eigenschaften, aber wegen  $f(x, y) \triangleright x$  gilt  $x \succ f(x, y)$ . Hier gilt aber nicht  $\mathcal{V}(t) \subseteq \mathcal{V}(s)$ .

### Aufgabe 3

- a) i Wegen  $\text{plus}(\text{plus}(x, y), 0) \triangleright \text{plus}(x, y)$  gilt hier auch  $\succ_{emb}$  (vgl Aufgabe 1a).  
 ii Hier gilt nicht  $\succ_{emb}$ , weil das plus auf der rechten Seite nirgendwo auf der linken Seite vorkommt.  
 iii Hier gilt  $\succ_{emb}$ , weil  $\text{minus}(s(x), s(y)) \succeq_{emb} \text{minus}(x, y)$  wegen  $s(x) \succ_{emb} x$  und  $s(y) \succeq_{emb} y$ .
- b) i Da die rechte Seite Teilterm der linken ist, folgt sofort  $s \succ_{emb}^{\triangleright} t$ .  
 ii Hier gilt nicht  $s \succ_{emb}^{\triangleright} t$  mit derselben Begründung wie oben.  
 iii Hier gilt nicht  $s \succ_{emb}^{\triangleright} t$ . Weder ist die rechte Seite Teilterm der linken, noch gilt alternativ  $0 \succeq_{emb}^{\triangleright} y$ .
- c) Weil die LPO eine Simplifikationsordnung ist, enthält sie die Einbettungsordnung. Für (1) und (3) ist also nichts weiter zu zeigen, es gilt  $s \succ_{LPO} t$ . Als Präzedenz wählen wir  $\text{minus} \sqsupset \text{plus}$ .

Dann gilt

$$\text{minus}(\text{minus}(x, y), z) \succ_{lpo} \text{minus}(x, \text{plus}(y, z))$$

weil erstens  $\text{minus}(x, y) \succ_{lpo} x$  (da dies bereits für die Einbettungsordnung gilt!) und zweitens  $\text{minus}(\text{minus}(x, y), z) \succ_{lpo} \text{plus}(y, z)$ . Dies gilt, weil  $\text{minus} \sqsupset \text{plus}$  und ferner

$$\text{minus}(\text{minus}(x, y), z) \succ_{lpo} y$$

sowie

$$\text{minus}(\text{minus}(x, y), z) \succ_{lpo} z.$$

Dies folgt bereits aus der Einbettungsordnung.

## Aufgabe 4

Sei  $M := \mathbb{N} \times \mathcal{T}(\Sigma, \mathcal{V})$ . Definieren  $\succ \subseteq M \times M$  mittels

$$(n, s) \succ (m, t) \iff n > m \vee (n = m \wedge s \triangleright t)$$

Da  $>$  und  $\triangleright$  fundierte Relationen sind, ist (vgl. Skript) auch  $\succ$  fundiert. Wir können darauf also eine Noethersche Induktion durchführen.

Als einen Basisfall können wir  $(n, s) = (0, s)$  für einen beliebigen Term  $s$  betrachten. Aus  $s \leftrightarrow_{\mathcal{E}}^n t$  folgt dann nämlich  $s = t$ , also ist  $s \equiv t = s \equiv s$ . Dies ist in der Menge der reflexiven Gleichungen  $\mathcal{R}$  enthalten, welche in  $CC^S(\mathcal{E})$  enthalten ist.

Sei nun  $(n, s)$  mit  $n > 0$  gegeben und  $t$  ein Term mit  $s \leftrightarrow_{\mathcal{E}}^n t$ . Wir führen eine Fallunterscheidung durch:

**Fall 1:** In der Herleitung von  $t$  aus  $s$  wird irgendwo eine Regel an oberster Stelle angewendet. Das bedeutet:  $s \leftrightarrow_{\mathcal{E}}^i u \leftrightarrow_{\mathcal{E}} v \leftrightarrow_{\mathcal{E}}^j t$  für eine Gleichung  $u \equiv v$  oder  $v \equiv u$  in  $\mathcal{E}$ . Da  $u, v \in \text{Subterms}(\mathcal{E})$  folgt  $\text{Subterms}(u), \text{Subterms}(v) \subseteq \text{Subterms}(\mathcal{E}) \subseteq S$ . Ferner gilt  $i, j < n$  und damit  $(n, s) \succ (i, s)$  sowie  $(n, s) \succ (j, v)$ . Aus der Induktionshypothese folgt:  $s \equiv u$  und  $v \equiv t$  sind in  $CC^S(\mathcal{E})$  enthalten. Ferner ist  $u \equiv v$  nach Konstruktion in  $CC^S(\mathcal{E})$  enthalten. Da der Kongruenzabschluß gegenüber Transitivität abgeschlossen ist, muss er also auch  $s \equiv t$  enthalten.

**Fall 2:** In der Herleitung von  $t$  aus  $s$  wird nirgendwo eine Regel an oberster Stelle angewendet. Dann gilt  $s = f(s_1, \dots, s_k)$  und  $t = f(t_1, \dots, t_k)$ . Ferner gilt  $s_i \leftrightarrow_{\mathcal{E}}^n t_i$  für  $1 \leq i \leq k$ .

Nun gilt  $s \triangleright s_i$  für  $1 \leq i \leq k$  und damit  $(n, s) \succ (n, s_i)$ . Nun sind trivialerweise die Subterme der  $s_i$  und  $t_i$  in  $S$  enthalten, da diese eine Teilmenge der Subterme von  $s$  und  $t$  darstellen. Mit der Induktionshypothese folgt dann, dass die  $s_i \equiv t_i$  in  $CC^S(\mathcal{E})$  enthalten sind. Da der Kongruenzabschluß insbesondere abgeschlossen gegenüber Kongruenz ist, muss auch  $f(s_1, \dots, s_n) \equiv f(t_1, \dots, t_n)$ , also  $s \equiv t$  in  $CC^S(\mathcal{E})$  enthalten sein, qed.