Lösungsvorschlag *Termersetzungssysteme* – Blatt 8

Aufgabe 1

a) Die LPO ist für $\mathcal{R}_1$ nicht anwendbar: In der dritten Regel müsste $x = z$ oder $x \succ_{lpo} z$ gelten, was nicht der Fall ist. Verwenden also die LPOS.

Ähnlich der Präzedenz bilden wir auch die Permutationen für den Status *on-demand*. Wir gehen nun die Regeln durch:

- $\mathsf{plus}(x, y) \to \mathsf{f}(x, y, 0)$ erfodert $\mathsf{plus} \sqsupset \mathsf{f}$. Aufgrund der Teiltermeigenschaft gilt nämlich bereits $\mathsf{plus}(x, y) \succ_{lpos} x$ und $\mathsf{plus}(x, y) \succ_{lpos} y$. Mit $\mathsf{plus} \sqsupset 0$ gilt dann auch $\mathsf{plus}(x, y) \succ_{lpos} 0$.
- $\mathsf{f}(0, 0, z) \succ_{lpos} z$ gilt aufgrund der Teiltermeigenschaft.
- $\mathsf{f}(x, \mathsf{s}(y), z) \to \mathsf{f}(z, y, \mathsf{s}(x))$ erfordert eine Permutation für f, die mit 2 beginnt. Dann ist nämlich $\mathsf{s}(y) \succ_{lpos} y$. Bleibt $\mathsf{f}(x, \mathsf{s}(y), z) \succ_{lpos} z, \mathsf{s}(x)$ zu zeigen. Für z folgt dies aus der Teiltermeigenschaft. Für $\mathsf{f}(x, \mathsf{s}(y), z) \succ_{lpos} \mathsf{s}(x)$ benötigen wir aber die Präzedenz $\mathsf{f} \sqsupset \mathsf{s}$. Mit $\mathsf{f}(x, \mathsf{s}(y), z) \succ_{lpos} x$ folgt dann die Behauptung.
- $\mathsf{f}(\mathsf{s}(x), y, z) \to \mathsf{f}(x, y, \mathsf{s}(z))$. Hier stimmen die Terme an der zweiten Stelle überein. Vergleichen wir als nächstes die dritte Stelle, schlägt der Beweis fehl. Der Status von f muss also die Permutation $(2, 1, 3)$ sein. Damit gilt dann $\mathsf{s}(x) \succ_{lpos} x$ und $\mathsf{f}(\mathsf{s}(x), y, z) \succ_{lpos} \mathsf{s}(z)$ wegen der Präzedenz $\mathsf{f} \sqsupset \mathsf{s}$.

b) Die LPO ist für $\mathcal{R}_2$ anwendbar. Wir gehen die Regeln durch:

- $\mathsf{rev}(\mathsf{rev}(x)) \succ_{lpo} x$ gilt für jede Präzedenz bereits aufgrund der Teiltermeigenschaft.
- $\mathsf{rev}(x) \succ_{lpo} \mathsf{r}(x, \mathsf{nil})$ erfordert die Präzedenz $\mathsf{rev} \sqsupset \mathsf{r}$ sowie $\mathsf{rev} \sqsupset \mathsf{nil}$.
- $\mathsf{r}(\mathsf{nil}, y) \succ_{lpo} y$ gilt bereits aufgrund der Teiltermeigenschaft.
- $\mathsf{r}(\mathsf{cons}(x, z), y) \to \mathsf{r}(z, \mathsf{cons}(x, y))$ lässt sich mit der LPO anordnen, denn $\mathsf{cons}(x, z) \succ_{lpo} z$ wegen der Teiltermeigenschaft, ferner $\mathsf{r}(\mathsf{cons}(x, z), y) \succ_{lpo} \mathsf{cons}(x, y)$ mittels Präzedenz $\mathsf{r} \sqsupset \mathsf{cons}$ und ferner $\mathsf{r}(\mathsf{cons}(x, z), y) \succ_{lpo} x, y$ wegen Teiltermeigenschaft.

Aufgabe 2

a) $\sim$ ist offensichtlich stabil. Beweis mittels struktureller Induktion über s. Im Induktionsanfang gilt $s = t$ und damit auch $s\sigma = t\sigma$ für eine Substitution σ. Andernfalls ist $s = \mathsf{f}(s_1, \ldots, s_n)$ und $t = \mathsf{g}(t_1, \ldots, t_n)$, $f \equiv g$ und $s_i \sim t_i$ für alle $1 \leq i \leq n$. Mit der Induktionshypothese ist dann $s_i\sigma \sim t_i\sigma$, daraus folgt die Behauptung.

Nun beweisen wir $s\sigma \succ_{qlpo} t\sigma$ für alle Substitutionen σ und für alle Terme $s \succ_{qlpo} t$. Dazu nutzen wir Noethersche Induktion über $\succ := \triangleright^2_{lex}$.

Sei σ eine beliebige Substitution und sei $s \succ_{qlpo} t$ für zwei Terme s, t. Dann gilt in jedem Fall $s = \mathsf{f}(s_1, \ldots, s_n)$. Wir führen nun eine Fallunterscheidung durch:

Fall 1: $s_i \succsim_{qlpo} t$ für ein $i \in \{1, \ldots, n\}$. Da $(s, t) \succ (s_i, t)$ gilt mit der Induktionshypothese $s_i\sigma \succsim_{qlpo} t\sigma$ und damit mittels der ersten Regel auch $s\sigma \succ_{qlpo} t\sigma$.

Fall 2: $t = \mathsf{g}(t_1, \ldots, t_m), \mathsf{f} \sqsupset \mathsf{g}$ und $s \succ_{qlpo} t_i$ für alle $i \in \{1, \ldots m\}$. Da $t \triangleright t_i$, gilt $(s, t) \succ (s, t_i)$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$. Mit der Induktionshpyothese folgt dann $s\sigma \succ_{qlpo} t_i\sigma$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$. Da sich die Root-Symbole von s und t bei Substitution nicht ändern, gilt also mit der zweiten Regel $s\sigma \succ_{qlpo} t\sigma$.

Fall 3: $t = \mathsf{g}(t_1, \ldots, t_m), \mathsf{f} \equiv \mathsf{g}$ und es ex. ein $i \in \{1, \ldots, n\}$ so dass $s_j \sim t_j$ für $1 \leq j < i$, $s_i \succ_{qlpo} t_i$ sowie $s \succ_{qlpo} t_j$ für $i < j \leq n$. Nun gilt $(s, t) \succ (s_j, q)$ für $1 \leq j \leq n$ und für beliebiges q. Außerdem gilt $(s, t) \succ (s, t_j)$ für $i < j \leq n$. Mit der Induktionshypothese folgt also $s_j\sigma \sim t_j\sigma$ für $1 \leq j < i$, $s_i\sigma \succ_{qlpo} t_i\sigma$ sowie $s\sigma \succ_{qlpo} t_j\sigma$ für $i < j \leq n$. Damit gilt aber nach der dritten Regel auch $s\sigma \succ_{qlpo} t\sigma$.

In allen Fällen wurde also $s\sigma \succ_{qlpo} t\sigma$ für $s \succ_{qlpo} t$ gezeigt. Damit ist $\succ_{qlpo}$ stabil.

b) $\mathcal{R}_1$ lässt sich *nicht* mittels LPO anordnen: Die zweite Regel erfordert $\mathsf{f} \sqsupset \mathsf{s}$. Dann verlangt die dritte Regel entweder $\mathsf{f} \sqsupset \mathsf{g}$ oder $\mathsf{s} \sqsupset \mathsf{g}$. In beiden Fällen lässt sich dann die erste Regel nicht mehr behandeln, da hier entweder $\mathsf{g} \sqsupset \mathsf{f}$ oder $\mathsf{s} \sqsupset \mathsf{f}$ gelten müsste. Dann enthielte die Präzedenz aber einen Zykel.

Versuchen also, einen Beweis mittels QLPO zu finden. Sicher muss mit der zweiten Regel immernoch $\mathsf{f} \sqsupset \mathsf{s}$ gelten. Wir versuchen es also mit $\{f, g\} \sqsupset \{s\}$ und gehen die Regeln durch:

- $\mathsf{g}(\mathsf{s}(x)) \succ_{qlpo} \mathsf{f}(x)$, da $\mathsf{g} \equiv \mathsf{f}$ und $\mathsf{s}(x) \succ_{qlpo} x$ wegen Teiltermeigenschaft bzw. Regel 1.
- $\mathsf{f}(0) \succ_{qlpo} \mathsf{s}(0)$, weil $\mathsf{f} \sqsupset \mathsf{s}$ und $\mathsf{f}(0) \succ_{qlpo} 0$.

- Begründung von innen nach außen: $\mathsf{s}(x) \succ_{qlpo} x$. Mit $\mathsf{f} \equiv \mathsf{g}$ gilt dann auch $\mathsf{f}(\mathsf{s}(x)) \succ_{qlpo} \mathsf{g}(x)$. Wegen $\mathsf{f} \sqsupset \mathsf{s}$ gilt dann auch $\mathsf{f}(\mathsf{s}(x)) \succ_{qlpo} \mathsf{s}(\mathsf{g}(x))$ sowie im letzten Schritt $\mathsf{f}(\mathsf{s}(x)) \succ_{qlpo} \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{g}(x)))$.
- $\mathsf{g}(0) \succ_{qlpo} 0$ gilt mit Regel 1 oder der Teiltermeigenschaft.

Nun zu $\mathcal{R}_2$. Hier ist die LPO anwendbar mit der Präzedenz $\mathsf{f} \sqsupset \mathsf{g} \sqsupset \mathsf{s} \sqsupset \mathsf{plus} \sqsupset 1$, die offensichtlich fundiert (da zykelfrei) ist. Wir gehen die Regeln durch:

- $\mathsf{f}(0) \succ_{lpo} 1$ mit $\mathsf{f} \sqsupset 1$.
- $\mathsf{f}(\mathsf{s}(x) \succ_{lpo} \mathsf{g}(\mathsf{f}(x))$ mit $\mathsf{f} \sqsupset \mathsf{g}$ sowie $\mathsf{f}(\mathsf{s}(x)) \succ_{lpo} \mathsf{f}(x)$ wegen $\mathsf{s}(x) \succ_{lpo} x$.
- $\mathsf{g}(x) \succ_{lpo} \mathsf{plus}(x, \mathsf{s}(x))$ mit $\mathsf{g} \sqsupset \mathsf{plus}$ sowie $\mathsf{g}(x) \succ_{lpo} x$ sowie $\mathsf{g}(x) \succ_{lpo} \mathsf{s}(x)$ wegen $\mathsf{g} \sqsupset \mathsf{s}$ und $\mathsf{g}(x) \succ_{lpo} x$.
- $\mathsf{f}(\mathsf{s}(x)) \succ_{lpo} \mathsf{plus}(\mathsf{f}(x), \mathsf{s}(\mathsf{f}(x)))$ wegen $\mathsf{f} \sqsupset \mathsf{plus}$ sowie $\mathsf{f}(\mathsf{s}(x)) \succ_{lpo} \mathsf{f}(x)$ (siehe oben) und $\mathsf{f}(\mathsf{s}(x)) \succ_{lpo} \mathsf{s}(\mathsf{f}(x))$ wegen $\mathsf{f} \sqsupset \mathsf{s}$ und $\mathsf{f}(\mathsf{s}(x)) \succ_{lpo} \mathsf{f}(x)$, siehe oben.

Aufgabe 3

a) Definition QLPOS mit Status: Ordne jedem Funktionssymbol f mit der Stelligkeit n eine n-Stellige Permutation π_f zu. Nun gilt $s \succ_{qlpos} t$ gdw. $s = \mathsf{f}(s_1, \ldots, s_n)$ und eine der folgenden Aussagen zutrifft:

1) Analog zu 1) der QLPO mit $\succsim_{qlpos}$ statt $\succsim_{qlpo}$.
2) Analog zu 2) der QLPO mit $\succ_{qlpos}$ statt $\succ_{qlpo}$.
3) $t = \mathsf{g}(t_1, \ldots, t_n), \mathsf{f} \equiv \mathsf{g}$ und es ex. ein $i \in \{1, \ldots, n\}$, so dass $s_{\pi_f(j)} \sim t_{\pi_g(j)}$ für $1 \leq j < i$, $s_{\pi_f(i)} \succ_{qlpos} t_{\pi_f(i)}$ sowie $s \succ_{qlpos} t_{\pi_g(j)}$ für $i < j \leq n$.

Statt von links nach rechts wird also den Permutationen π_f und π_g entsprechend verglichen.

b) Betrachte das TES $\mathcal{R}$ aus den Regeln

$$\mathsf{h}(z, \mathsf{s}(\mathsf{f}(x))) \to \mathsf{h}(\mathsf{s}(z), \mathsf{g}(x))$$

$$\mathsf{h}(z, \mathsf{s}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{h}(\mathsf{s}(z), \mathsf{f}(x))$$

$$\mathsf{f}(\mathsf{g}(x)) \to \mathsf{s}(x)$$

Offensichtlich versagt hier die QLPO, da man $z \succ_{qlpo} \mathsf{s}(z)$ zeigen müsste, was nicht geht. Ebenso versagt aber die LPOS. Man müsste hier die Argumente von h von rechts nach links vergleichen. Nun erfordert die dritte Regel $\mathsf{f} \sqsupset \mathsf{s}$ oder $\mathsf{g} \sqsupset \mathsf{s}$. Daher kann in der ersten Regel $\mathsf{s}(\mathsf{f}(x)) \succ_{lpos} \mathsf{g}(x)$ nur für $\mathsf{f} \sqsupset \mathsf{g}$ gelten. Analog kann in der zweiten Regel $\mathsf{s}(\mathsf{g}(x)) \succ_{lpos} \mathsf{f}(x)$ nur für $\mathsf{g} \sqsupset \mathsf{f}$ gelten. Wir können also keine vernünftige Präzedenz für die LPO erzeugen!

Mit der QLPOS dagegen lässt sich die Terminierung des TES beweisen. Sei dazu $\{\mathsf{f}, \mathsf{g}\} \sqsupset \{\mathsf{s}\}$ und der Status von h sei $(2, 1)$, wir vergleichen also von links nach rechts. Dann gilt $\mathsf{s}(\mathsf{f}(x)) \succ_{qlpos} \mathsf{g}(x)$, da $\mathsf{f}(x) \sim \mathsf{g}(x)$. Analog geht man für die zweite Regel vor. Bei der dritten Regel gilt $\mathsf{f}(\mathsf{g}(x)) \succ_{qlpos} \mathsf{s}(x)$ wegen $\mathsf{f} \sqsupset \mathsf{s}$ und $\mathsf{f}(\mathsf{g}(x)) \succ_{qlpos} x$.

Alternative TESe wären

$$
\begin{aligned}
\mathsf{f}(\mathsf{f}(x)) &\to \mathsf{g}(x)\\
\mathsf{g}(\mathsf{g}(x)) &\to \mathsf{f}(x)\\
\mathsf{h}(x, \mathsf{f}(y)) &\to \mathsf{h}(\mathsf{f}(x))
\end{aligned}
$$

oder

$$
\begin{aligned}
\mathsf{f}(x, \mathsf{s}(y), z) &\to \mathsf{f}(z, y, \mathsf{s}(x))\\
\mathsf{f}'(0) &\to \mathsf{s}'(0)\\
\mathsf{g}'(\mathsf{s}'(x)) &\to \mathsf{f}'(x)\\
\mathsf{f}'(\mathsf{s}'(x)) &\to \mathsf{s}'(\mathsf{s}'(\mathsf{g}'(x)))
\end{aligned}
$$