RHEINISCH-
WESTFÄLISCHE
TECHNISCHE
HOCHSCHULE
AACHEN

LEHR- UND FORSCHUNGSGEBIET
INFORMATIK II
RWTH Aachen · D-52056 Aachen · GERMANY
http://www-i2.informatik.rwth-aachen.de/lufgi2/tes06/

Prof. Dr. Jürgen Giesl
Peter Schneider-Kamp, Stephan Swiderski, René Thiemann

Übungen *Termersetzungssysteme* – Blatt 1

Abgabe am Dienstag, den 31.10.2006, zu Beginn der Übung.

Aufgabe 1 (1+1 Punkte)

Sei die Signatur Σ gegeben durch $\Sigma_0 = \{\mathsf{0}, \mathsf{1}, \mathsf{X}, \mathsf{Y}\}$, $\Sigma_1 = \{\mathsf{D}\}$ und $\Sigma_2 = \{\mathsf{plus}, \mathsf{minus}, \mathsf{times}, \mathsf{div}\}$.

a) Ein *Termersetzungssystem* $\mathcal{R}$ besteht aus Gleichungen $t_1 \equiv t_2$, wobei diese Gleichungen nur von links nach rechts ausgewertet werden können. Man schreibt daher $t_1 \to t_2$ und bezeichnet solche Gleichungen als *Regeln*. Geben Sie ein Termersetzungssystem $\mathcal{R}$ über der Variablenmenge $\mathcal{V} = \{p, q, \dots\}$ an, welches symbolische Ableitungen nach X durchführt. Ergänzen Sie dazu die rechten Seiten der folgenden Regeln für den Ableitungsoperator D.

$$\begin{aligned}
\mathsf{D}(\mathsf{X}) &\to \dots \\
\mathsf{D}(\mathsf{Y}) &\to \dots \\
\mathsf{D}(\mathsf{1}) &\to \dots \\
\mathsf{D}(\mathsf{0}) &\to \dots \\
\mathsf{D}(\mathsf{plus}(p, q)) &\to \dots \\
\mathsf{D}(\mathsf{minus}(p, q)) &\to \dots \\
\mathsf{D}(\mathsf{times}(p, q)) &\to \dots \\
\mathsf{D}(\mathsf{div}(p, q)) &\to \dots
\end{aligned}$$

b) Werten Sie den Term $\mathsf{D}(\mathsf{div}(\mathsf{1}, \mathsf{X}))$ auf alle möglichen Arten aus. Ist Ihr Ergebnis eindeutig?

Aufgabe 2 **(1+3+1+1+3+2 Punkte)**

Sei die Signatur Σ gegeben durch $\Sigma_0 = \{\mathcal{O}\}$, $\Sigma_1 = \{\mathsf{succ}\}$ und $\Sigma_2 = \{\mathsf{minus}\}$. Sei außerdem

$$\mathcal{E} = \{ \quad \begin{aligned} \mathsf{minus}(\mathcal{O}, y) &\equiv \mathcal{O}, \\ \mathsf{minus}(x, \mathcal{O}) &\equiv x, \\ \mathsf{minus}(\mathsf{succ}(x), \mathsf{succ}(y)) &\equiv \mathsf{minus}(x, y) \quad \} \end{aligned}$$

ein Termgleichungssystem über Σ und $\{x, y, \ldots\}$.

Widerlegen oder beweisen Sie die folgenden Aussagen, ohne Resultate aus Kapitel 3 zu benutzen, wie etwa die Stabilität und Monotonie von $\equiv_{\mathcal{E}}$.

a) Es gibt ein Modell A mit Träger $\mathbb{N}$ von $\mathcal{E}$.

b) Es gibt ein Modell A mit Träger $\mathbb{N}$ von $\mathcal{E}$ mit $A \models \mathsf{minus}(x, \mathcal{O}) \equiv \mathsf{succ}(x)$.

c) Es gibt ein Modell A mit Träger $\mathbb{N}$ von $\mathcal{E}$ mit $A \not\models \mathsf{minus}(x, \mathcal{O}) \equiv \mathsf{succ}(x)$.

d) $\mathcal{E} \models \mathsf{minus}(x, \mathcal{O}) \equiv \mathsf{succ}(x)$

e) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\mathcal{E} \models \mathsf{minus}(\mathsf{succ}^n(\mathcal{O}), \mathsf{succ}^n(\mathcal{O})) \equiv \mathcal{O}$

f) Es gibt ein Modell A mit Träger $\{a\}$ und ein Termgleichungssystem $\mathcal{E}'$ mit $A \not\models \mathcal{E}'$.

Aufgabe 3 **(2+2+2 Punkte)**

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:
Für jeden Term t sowie für alle Substitutionen σ und μ gilt

a) Falls $\sigma = [x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n]$, dann gilt $t\sigma\mu = t[x_1/t_1\mu, \ldots, x_n/t_n\mu]$.

b) Falls $\pi \in Occ(t)$ und $\sigma = \sigma\sigma$, dann gilt $t[t\sigma|_\pi]_\pi\sigma = t\sigma$.

c) Falls $\pi_1, \pi_2 \in Occ(t), \pi_1 \perp \pi_2$, dann gilt $t|_{\pi_1} = t[p]_{\pi_2}|_{\pi_1}$.