RWTH RHEINISCH-WESTFÄLISCHE TECHNISCHE HOCHSCHULE AACHEN

**LEHR- UND FORSCHUNGSGEBIET INFORMATIK II**
RWTH Aachen · D-52056 Aachen · GERMANY
http://www-i2.informatik.rwth-aachen.de/lufgi2/tes06/

LuFG Informatik II

Prof. Dr. Jürgen Giesl
Peter Schneider-Kamp, Stephan Swiderski, René Thiemann

# Übungen *Termersetzungssysteme* – Blatt 11

Abgabe am Dienstag, dem 23.1.2007, zu Beginn der Übung.

Am letzten Freitag in der Vorlesungszeit (9.2.2007) findet anstelle der Vorlesung die Scheinprüfung statt. Je nach Anzahl der Interessenten wird dies eine mündliche Prüfung oder eine Klausur sein. Damit wir wissen, wer daran teilnehmen möchte, bitten wir alle Interessenten, im Übungssystem unter den Benutzerdaten den Eintrag "Möchte Schein erwerben" bis zum 24.1.2007 auf "Ja" zu ändern. (Alle Einträge wurden am 16.1.2007 auf "Nein" zurückgesetzt.)

## Aufgabe 1 (5 × 1,5 + 2,5 Punkte)

Berechnen Sie für die folgenden Termersetzungssysteme die kritischen Paare und überprüfen Sie, welche davon zusammenführbar sind. Welche der Termersetzungssysteme sind lokal konfluent, welche sind konfluent? Welches Kriterium haben Sie jeweils zum Nachweis der Konfluenz genutzt?

a) $\mathcal{R}_1 = \{ \ \mathsf{f}(\mathsf{f}(x)) \ \to \ \mathsf{g}(x) \ \}$

b) $\mathcal{R}_2 = \left\{ \begin{array}{rcl} \mathsf{f}(x, \mathsf{f}(y, z)) & \to & \mathsf{f}(\mathsf{f}(x, y), z) \\ \mathsf{f}(\mathsf{e}, x) & \to & x \end{array} \right\}$

c) $\mathcal{R}_3 = \left\{ \begin{array}{rcl} \mathsf{f}(x, \mathsf{f}(y, z)) & \to & \mathsf{f}(\mathsf{f}(x, y), z) \\ \mathsf{f}(x, \mathsf{e}) & \to & x \end{array} \right\}$

d) $\mathcal{R}_4 = \left\{ \begin{array}{rcll} \mathsf{gt}(x, \mathsf{s}^i(x)) & \to & \mathsf{false} & \mid i \in \mathbb{N} \\ \mathsf{gt}(\mathsf{s}^i(x), x) & \to & \mathsf{true} & \mid i \in \mathbb{N}, i > 0 \end{array} \right\}$

e) $\mathcal{R}_5 = \left\{ \begin{array}{rcl} \mathsf{minus}(x, 0) & \to & x \\ \mathsf{minus}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{minus}(x, y) \\ \mathsf{div}(0, y) & \to & 0 \\ \mathsf{div}(\mathsf{s}(x), y) & \to & \mathsf{s}(\mathsf{div}(\mathsf{minus}(\mathsf{s}(x), y), y)) \end{array} \right\}$

f) $\mathcal{R}_6 = \mathcal{R}_4 \cup \mathcal{R}_5$

## Aufgabe 2 (2 + 3 Punkte)

Zur Berechnung von Normalformen eines Terms bzgl. eines TES $\mathcal{R}$ wird häufig eine feste Auswertungsstrategie festgelegt. Eine oft genutzte Strategie ist die innermost-Auswertungsstrategie. Die entsprechende Auswertungsrelation $\xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{R}}$ ist definiert als $s \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{R}} t$ gdw.

$s \to_{\mathcal{R}} t$ und alle direkten Teilterme des Redex sind in Normalform bzgl. $\mathcal{R}$.

Um also einen Term $s$ an der Stelle $\pi$ mit $\xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{R}}$ zu reduzieren, müssen alle direkten Teilterme von $s|_\pi$ in Normalform sein.

Offensichtlich gilt $\xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{R}} \subseteq \to_{\mathcal{R}}$ und daher folgt aus der Terminierung von $\mathcal{R}$ auch die innermost-Terminierung von $\mathcal{R}$.

a) Widerlegen Sie, dass aus der Konfluenz von $\to_{\mathcal{R}}$ die Konfluenz von $\xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{R}}$ folgt.

b) Beweisen Sie, dass aus der Konvergenz von $\to_{\mathcal{R}}$ die Konvergenz von $\xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{R}}$ folgt.
Hinweis: Ein Term $t$ ist in Normalform bzgl. $\to_{\mathcal{R}}$ gdw. er in Normalform bzgl. $\xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{R}}$ ist.

## Aufgabe 3 (4 + 4 + 8* Punkte)

Eine deterministische Turingmaschine ist ein 6-Tupel $(\mathcal{Q}, \Sigma, \varepsilon, q_s, q_e, \delta)$ mit endlicher Zustandsmenge $\mathcal{Q}$, endlichem Alphabet $\Sigma$, dem leeren Zeichen $\varepsilon \in \Sigma$, dem Startzustand $q_s \in \mathcal{Q}$, dem Endzustand $q_e \in \mathcal{Q}$ und der Schritt-Funktion $\delta : \mathcal{Q} \setminus \{q_e\} \times \Sigma \to \mathcal{Q} \times \{\text{left}, \text{right}\} \times \Sigma$. Eine Konfiguration $\mathcal{K}$ einer Turingmaschine ist ein Tripel $(q, p, b)$, wobei $q$ ein Zustand aus $\mathcal{Q}$ und $p \in \mathbb{Z}$ eine Position auf dem Band $b$ ist. Das Band $b$ ist ein Speicher, der als Funktion von $\mathbb{Z}$ nach $\Sigma$ modelliert wird, wobei nur endlich viele Speicherzellen belegt sind, d.h. $b(p) \neq \varepsilon$ gilt nur für endlich viele Positionen $p$.

Die Startkonfiguration $\mathcal{K}_s$ ist $(q_s, 0, b_{initial})$, wobei $b_{initial}(x) = \varepsilon$ für alle $x \in \mathbb{Z}$. Die Berechnungsrelation $\vdash$ ist wie folgt definiert:

$$
\begin{aligned}
(q,p,b) \vdash (q',p',b') \quad :\Leftrightarrow \quad & q \neq q_e, \\
& \delta(q, b(p)) = (q', \mathit{direction}, a), \\
& p' = \left\{ \begin{array}{ll} p+1, & \text{falls } \mathit{direction} = \text{right} \\ p-1, & \text{sonst} \end{array} \right\} \text{ und} \\
& b' \text{ ist das Band mit } b'(x) = \left\{ \begin{array}{ll} a, & \text{falls } x = p \\ b(x), & \text{sonst} \end{array} \right\}
\end{aligned}
$$

Eine Turingmaschine *terminiert* gdw. es keine unendliche Folge $\mathcal{K}_s \vdash \mathcal{K}_1 \vdash \mathcal{K}_2 \vdash \ldots$ gibt. Die Frage nach der Terminierung einer Turingmaschine - das sogenannte Halteproblem - ist bekanntlich unentscheidbar.

a) Geben Sie zu einer Turingmaschine $(\mathcal{Q}, \Sigma, \varepsilon, q_s, q_e, \delta)$ ein zugehöriges Termersetzungssystem $\mathcal{R}$ an, so dass jeder Berechnungsschritt der Turingmaschine durch einen (oder mehrere) Termersetzungsschritte simuliert werden kann. Sie brauchen dazu keinen formalen Beweis liefern, sollten aber Ihre Konstruktion erläutern. Achten Sie auch darauf, dass das entstehende TES lokal konfluent ist.

   Hinweis: Um eine Konfiguration $(q, p, b)$ als Term darzustellen, können Sie z.B. zu jedem $q \in \mathcal{Q}$ ein zweistelliges Funktionssymbol $f_q$ nutzen. Die beiden Argumente $\ell$ und $r$ eines Terms $f_q(\ell, r)$ kodieren dann die Zeichen vor der Position $p$ auf dem Band und die Zeichen nach der Position $p$ auf dem Band. Falls im folgenden Beispiel $p$ auf die Position mit dem Zeichen $a_3$ zeigt, dann kodiert $\ell$ die Zeichenfolge $a_3 a_2 a_1$ und $r$ die Folge $a_4 a_5 a_6$.

| Band $b$ | $\cdots$ | $\varepsilon$ | $\varepsilon$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ | $a_6$ | $\varepsilon$ | $\varepsilon$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

*Zusatzpunkte

b) Beweisen Sie die Unentscheidbarkeit der lokalen Konfluenz, indem Sie das Halteproblem einer Turingmaschine auf die Frage nach lokaler Konfluenz eines TES reduzieren.

Hinweise:

- Eine Turingmaschine terminiert gdw. wenn sie von der Startkonfiguration eine Konfiguration mit Endzustand $q_e$ erreicht.
- Die lokale Konfluenz des TES aus Aufgabenteil a) kann nur durch zusätzliche TES-Regeln gefährdet werden.

c) Wahrscheinlich ist Ihre Konstruktion aus Teil a) ungeeignet, um die Unentscheidbarkeit der Terminierung eines TES zu beweisen. Der Grund ist, dass auch unerreichbare Konfigurationen als Term dargestellt werden können, die dann zur Nicht-Terminierung führen. Als Beispiel betrachten Sie die Turingmaschine $(\{q_{es}, q_1\}, \{\varepsilon\}, \varepsilon, q_{es}, q_{es}, \delta)$ mit $\delta(q_1, \varepsilon) = (q_1, \text{right}, \varepsilon)$. Da der Startzustand gleich dem Endzustand ist, terminiert die Turingmaschine offensichtlich. Allerdings ist von der (unerreichbaren) Konfiguration $\mathcal{K} = (q_1, 0, b)$ die unendliche Folge $\mathcal{K} \vdash (q_1, 1, b) \vdash (q_1, 2, b) \vdash \ldots$ möglich. Deshalb wird ein Term, der die Konfiguration $\mathcal{K}$ repräsentiert, nicht terminieren.

Passen Sie Ihre Konstruktion aus Teil a) so an, dass die Turingmaschine terminiert gdw. das entstehende TES terminiert. Erläutern Sie Ihre Konstruktion. (Ein formaler Beweis wird nicht verlangt)