RWTH RHEINISCH-WESTFÄLISCHE TECHNISCHE HOCHSCHULE AACHEN

LEHR- UND FORSCHUNGSGEBIET INFORMATIK II
RWTH Aachen · D-52056 Aachen · GERMANY
http://www-i2.informatik.rwth-aachen.de/lufgi2/tes06/

LuFG Informatik II

Prof. Dr. Jürgen Giesl
Peter Schneider-Kamp, Stephan Swiderski, René Thiemann

Übungen *Termersetzungssysteme* – Blatt 12

Abgabe am Dienstag, dem 30.1.2007, zu Beginn der Übung.

Aufgabe 1 (2 Punkte)

Sei $\mathcal{R}$ ein Termersetzungssystem. Zeigen Sie, dass für alle $\langle s, t\rangle \in CP(\mathcal{R})$ gilt:

$$s \leftrightarrow_{\mathcal{R}}^* t$$

Dies bedeutet, dass kritische Paare logische Konsequenzen eines Termersetzungssystems sind, was die Grundlage der in Kapitel 6 vorgestellten Vervollständigung ist.

Aufgabe 2 (3 + 3 Punkte)

Für jedes TES $\mathcal{R}$ gilt der Zusammenhang, dass $\to_{\mathcal{R}}$ lokal konfluent ist gdw. alle kritischen Paare zusammenführbar sind.

Wir betrachten nochmal die innermost Auswertungsrelation $\xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{R}}$ vom letzten Übungsblatt. Bei der innermost-Auswertung sind kritische Paare nur an der Wurzelposition interessant, da jeder Term, der einen Redex als echten Teilterm hat, nicht an der Wurzel reduziert werden kann. Deshalb definieren wir die innermost kritischen Paare als

$$CP_{\mathsf{i}}(\mathcal{R}) = \left\{ \langle r_1\sigma, r_2\sigma\rangle \;\middle|\; \begin{array}{l} \ell_1 \to r_1 \in \mathcal{R}, \ell_2 \to r_2 \in \mathcal{R}, \ell_1 \to r_1 \neq \ell_2 \to r_2, \\ \ell_1 \text{ variablendisjunkt zu } \ell_2, \sigma = mgu(\ell_1, \ell_2) \end{array} \right\}$$

Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

a) Wenn alle kritischen Paare $\langle s, t\rangle \in CP_{\mathsf{i}}(\mathcal{R})$ *innermost zusammenführbar* sind, d.h., wenn es jeweils einen Term q mit $s \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{R}}^* q$ und $t \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{R}}^* q$ gibt, dann ist $\xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{R}}$ lokal konfluent.

b) Wenn $\xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{R}}$ lokal konfluent ist, dann sind alle kritischen Paare in $CP_{\mathsf{i}}(\mathcal{R})$ innermost zusammenführbar.

Aufgabe 3 (2 Punkte)

Bestimmen Sie Terme r_1 und r_2 so, dass das Termersetzungssystem $\{\mathsf{f}(\mathsf{g}(x)) \to r_1,\ \mathsf{g}(\mathsf{h}(x)) \to r_2\}$ konvergent wird.

Aufgabe 4 (2 + 1 + 1 Punkte)

Ein *Grundtermersetzungssystem* enthält keine Variablen. Ein Termersetzungssystem $\mathcal{R}$ heißt *linksreduziert*, wenn für alle $\ell \to r \in \mathcal{R}$ gilt, dass ℓ bzgl. $\mathcal{R} \setminus \{\ell \to r\}$ in Normalform ist.

Zeigen Sie, dass jedes linksreduzierte Grundtermersetzungssystem konfluent ist. Geben Sie auch zwei TESe an, die beweisen, dass jede Eigenschaft für sich nicht hinreichend für die Konfluenz ist, d.h. finden Sie ein nicht-konfluentes, linksreduziertes TES und ein nicht-konfluentes Grundtermersetzungssystem.

Aufgabe 5 (3 + 3 Punkte)

Richten Sie die Termgleichungen und vervollständigen Sie die entstehenden TESe. Wählen Sie dabei jeweils eine geeignete Reduktionsordnung $\succ$. Nummerieren Sie Ihre Regeln und geben Sie alle erzeugten kritischen Paare an. Notieren Sie zu jedem kritischen Paar die Regeln, aus denen es entstanden ist, sowie ob das kritische Paar zusammenführbar ist bzw. welche neue Regel daraus entstanden ist. Geben Sie jedoch nicht die Reduktionsschritte oder die Substitution an.

a) $\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x))) \equiv x$

b)
$$\begin{aligned} \mathsf{f}(\mathsf{f}(x)) &\equiv \mathsf{f}(x) \\ \mathsf{f}(\mathsf{f}(x)) &\equiv \mathsf{g}(x) \\ x &\equiv \mathsf{g}(\mathsf{f}(x)) \end{aligned}$$