RHEINISCH-
WESTFÄLISCHE
TECHNISCHE
HOCHSCHULE
AACHEN

LEHR- UND FORSCHUNGSGEBIET
INFORMATIK II
RWTH Aachen · D-52056 Aachen · GERMANY
http://www-i2.informatik.rwth-aachen.de/lufgi2/tes06/

Prof. Dr. Jürgen Giesl
Peter Schneider-Kamp, Stephan Swiderski, René Thiemann

Übungen *Termersetzungssysteme* – Blatt 2

Abgabe am Mittwoch, dem 8.11.2006, in der Vorlesung.

Aufgabe 1 (2 Punkte)

Um den Nutzen von Lemma 3.1.4 und 3.1.8 (Stabilität und Monotonie von $\equiv_{\mathcal{E}}$) zu sehen, betrachten wir nochmals das Termgleichungssystem $\mathcal{E}$ aus Aufgabe 2 des letzten Blattes

$$\mathcal{E} = \{ \quad \begin{aligned} \mathsf{minus}(\mathcal{O}, y) &\equiv \mathcal{O}, \\ \mathsf{minus}(x, \mathcal{O}) &\equiv x, \\ \mathsf{minus}(\mathsf{succ}(x), \mathsf{succ}(y)) &\equiv \mathsf{minus}(x, y) \quad \} \end{aligned}$$

Beweisen Sie ein weiteres Mal für alle $n \in \mathbb{N}$ die bekannte Aussage

$$\mathcal{E} \models \mathsf{minus}(\mathsf{succ}^n(\mathcal{O}), \mathsf{succ}^n(\mathcal{O})) \equiv \mathcal{O}.$$

Führen Sie hierzu einen Induktionsbeweis, der ausschließlich die oben genannten Lemmata und den Zusammenhang $\mathcal{E} \models u \equiv v$ für alle $u \equiv v \in \mathcal{E}$ verwendet.

Aufgabe 2 (2+2+2+2 Punkte)

Welche der folgenden binären Relationen $\sim_i$ über Terme sind stabil? Welche sind monoton? Begründen Sie kurz, warum die Eigenschaft gilt, oder geben Sie ein Gegenbeispiel an.

- $s \sim_1 t$ gdw. die Anzahl der Funktionssymbole in s gleich der in t ist.
- $s \sim_2 t$ gdw. $\mathcal{V}(s) = \mathcal{V}(t)$.
- $s \sim_3 t$ gdw. s ein echter Teilterm von t ist.
- $s \sim_4 t$ gdw. s den Term t matcht.

Aufgabe 3 (4+4 Punkte)

Betrachten Sie die folgenden Gleichungen für Ausdrücke über Mengen. Zur Erleichterung der Lesbarkeit werden die üblichen Infixschreibweisen (also $xs \cup ys$ statt $\mathsf{union}(xs, ys)$ und $xs \backslash ys$ statt $\mathsf{minus}(xs, ys)$) verwendet. Die Mengen selbst werden durch Listen dargestellt. Das heißt z.B., dass die Menge $\{x, y, z\}$ als die Liste $x : (y : (z : \emptyset))$ dargestellt wird. Dabei steht $:$ für den Listenkonstruktor. $:$ ist üblicherweise rechtsassoziativ und so können die Klammern weggelassen werden, so dass $x : y : z : \emptyset$ ebenfalls die Menge $\{x, y, z\}$ repräsentiert.

Natürlich soll die Reihenfolge der Elemente in unsere Darstellung von Mengen nicht von Bedeutung sein, so dass das Gleichungssystem $\mathcal{E}$ nicht nur die Gleichungen für die Vereinigung und Differenz zweier Mengen enthält, sondern zusätzlich die Gleichungen ((3),(4) und (5)). Diese Gleichungen stellen sicher, dass zwei verschiedene Darstellungen derselben Menge als gleich erkannt werden.

$$\begin{aligned} \emptyset \cup xs &\equiv xs, && (1)\\ (x : xs) \cup ys &\equiv x : (xs \cup ys), && (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} xs \cup ys &\equiv ys \cup xs, && (3)\\ x : y : ys &\equiv y : x : ys, && (4)\\ x : x : xs &\equiv x : xs, && (5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x : xs)\backslash(x : ys) &\equiv xs\backslash ys, && (6)\\ xs\backslash\emptyset &\equiv xs, && (7)\\ \emptyset\backslash xs &\equiv \emptyset && (8) \end{aligned}$$

a) Leiten Sie $(x : y : xs) \cup (z : y : ys) \leftrightarrow^*_{\{(1),(2),(3),(4),(5)\}} x : y : z : (xs \cup ys)$ her.

b) Begründen Sie, warum

$$(x : y : \emptyset)\backslash(y : z : \emptyset) \leftrightarrow^*_{\{(4),(5),(6),(7),(8)\}} \emptyset$$

nicht gilt.

Unterstreichen Sie bei jedem $\leftrightarrow_{\mathcal{E}}$-Schritt jeweils den ersetzten Teilterm und geben Sie die Nummer der benutzten Gleichung an.