RHEINISCH-
WESTFÄLISCHE
TECHNISCHE
HOCHSCHULE
AACHEN

**LEHR- UND FORSCHUNGSGEBIET**
**INFORMATIK II**
RWTH Aachen · D-52056 Aachen · GERMANY
http://www-i2.informatik.rwth-aachen.de/lufgi2/tes06/

Prof. Dr. Jürgen Giesl
Peter Schneider-Kamp, Stephan Swiderski, René Thiemann

# Übungen *Termersetzungssysteme* – Blatt 7

Abgabe am Dienstag, dem 12.12.2006, zu Beginn der Übung.

## Aufgabe 1 (3 + 4 Punkte)

a) Beweisen Sie, dass die Teiltermrelation in der Einbettungsordnung enthalten ist, d.h., dass $\rhd \subseteq \succ_{emb}$.

b) Betrachten Sie die folgende Variante der Einbettungsordnung $\succ_{emb}^{\rhd}$, wobei $s \succ_{emb}^{\rhd} t$ genau dann gilt, wenn

- $s \rhd t$ *oder*
- $s = f(s_1, \dots, s_n)$, $t = f(t_1, \dots, t_n)$, $s_i \succ_{emb}^{\rhd} t_i$ für ein $1 \leq i \leq n$ und $s_j \succeq_{emb}^{\rhd} t_j$ für alle $j \neq i$.

Beweisen Sie, dass $\succ_{emb}^{\rhd}$ monoton und stabil ist.

## Aufgabe 2 (3 + 3 Punkte)

Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

a) Ein TES $\mathcal{R}$ terminiert genau dann, wenn es eine Reduktions*ordnung* $\succ$ gibt, so dass $l \succ r$ für alle Regeln $l \to r \in \mathcal{R}$ gilt.

b) Sei $\succ$ eine stabile, irreflexive Relation, die die Teiltermrelation enthält. Dann folgt aus $s \succ t$, dass $\mathcal{V}(s) \supseteq \mathcal{V}(t)$.

## Aufgabe 3 **(1,5 + 1,5 + 1 Punkte)**

Betrachten Sie die folgenden Regeln:

$$\mathsf{plus}(\mathsf{plus}(x, y), \mathsf{0}) \;\to\; \mathsf{plus}(x, y) \tag{1}$$
$$\mathsf{minus}(\mathsf{minus}(x, y), z) \;\to\; \mathsf{minus}(x, \mathsf{plus}(y, z)) \tag{2}$$
$$\mathsf{minus}(\mathsf{minus}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)), \mathsf{0}) \;\to\; \mathsf{minus}(x, y) \tag{3}$$

Welche der Regeln (1)-(3) lassen sich mit den folgenden Ordnungen anordnen. Begründen Sie Ihre Antwort kurz für jede Regel und jede Ordnung.

a) Die Einbettungsordnung $\succ_{emb}$.

b) Die Variante $\succ_{emb}^{\rhd}$ aus Aufgabe 1.

c) Die lexikographische Pfadordnung (LPO) mit Angabe der Präzedenz.

*Hinweis*: Achten Sie auf Teilmengenbeziehungen zwischen den Ordnungen.

## Aufgabe 4 **(6 Punkte)**

Beweisen Sie die Vollständigkeit des Kongruenzabschlusses (Satz 3.2.12), indem Sie die folgende Aussage mit noetherscher Induktion über $n$ und $s$ zeigen. Verwenden Sie als Induktionsrelation die lexikographische Kombination der Relationen $>_{\mathbb{N}}$ und $\rhd$, wobei $>_{\mathbb{N}}$ die übliche $>$-Ordnung auf $\mathbb{N}$ ist.

> Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle Terme $s$ gilt:
>
> Falls $t$ ein Term und $\mathcal{E}$ ein Gleichungssystem mit
> $Subterms(s) \subseteq S$, $Subterms(t) \subseteq S$, $Subterms(\mathcal{E}) \subseteq S$ und $s \leftrightarrow_{\mathcal{E}}^{n} t$ ist,
> dann gilt $s \equiv t \in CC^S(\mathcal{E})$.