Prof. Dr. Jürgen Giesl
Peter Schneider-Kamp, Stephan Swiderski, René Thiemann

Übungen *Termersetzungssysteme* – Blatt 8

Abgabe am Dienstag, dem 19.12.2006, zu Beginn der Übung.

Aufgabe 1 (4+3 Punkte)

Beweisen Sie die Terminierung der folgenden zwei TESe $\mathcal{R}_1$ und $\mathcal{R}_2$ über der Variablenmenge $\mathcal{V} = \{x, y, z\}$. Nutzen Sie, wenn möglich, die LPO, sonst die LPOS.

$$\begin{array}{lrcl}
\mathcal{R}_1: & \mathsf{plus}(x,y) & \to & \mathsf{f}(x,y,\mathsf{0}) \\
 & \mathsf{f}(\mathsf{0},\mathsf{0},z) & \to & z \\
 & \mathsf{f}(x,\mathsf{s}(y),z) & \to & \mathsf{f}(z,y,\mathsf{s}(x)) \\
 & \mathsf{f}(\mathsf{s}(x),y,z) & \to & \mathsf{f}(x,y,\mathsf{s}(z))
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lrcl}
\mathcal{R}_2: & \mathsf{rev}(\mathsf{rev}(x)) & \to & x \\
 & \mathsf{rev}(x) & \to & \mathsf{r}(x,\mathsf{nil}) \\
 & \mathsf{r}(\mathsf{nil},y) & \to & y \\
 & \mathsf{r}(\mathsf{cons}(x,z),y) & \to & \mathsf{r}(z,\mathsf{cons}(x,y))
\end{array}$$

Aufgabe 2 (3+(2+2) Punkte)

Eine Erweiterung der LPO ist die QLPO, in der Quasi-Präzedenzen erlaubt werden. Die Idee dabei ist es, manche Funktionssymbole als gleichwertig in ihrer Präzedenz zu behandeln. Formal ist eine Quasi-Präzendenz $\sqsupseteq$ eine reflexive und transitive Relation über den Funktionssymbolen. Die strikte Relation $\sqsupset$ ist dann definiert als $f \sqsupset g$ gdw. $f \sqsupseteq g$ und $g \not\sqsupseteq f$ gilt. Zwei Funktionssymbole f und g sind äquivalent ($f \equiv g$) gdw. $f \sqsupseteq g$ und $g \sqsupseteq f$ gilt. Wir erlauben hier nur Äquivalenzen zwischen Symbolen gleicher Stelligkeit.

Zur Repräsentation einer Quasi-Präzedenz eignet sich eher die Sichtweise einer (nicht-quasi) Präzedenz $\sqsupset$ über $\equiv$-Äquivalenzklassen der Signatur. Dann würde z.B. die Quasi-Präzendenz $\{f_1 \equiv f_2\} \sqsupset \{g_1 \equiv g_2 \equiv g_3\} \sqsupset \{h\}$ bedeuten, dass alle f_i zueinander äquivalent sind, also in $\equiv$-Beziehung stehen, genauso wie alle g_j Symbole äquivalent sind. Desweiteren gilt die strikte Beziehung $f_i \sqsupset g_j \sqsupset h$ für beliebige i und j.

Um nun die QLPO zu definieren, benötigen wir zunächst eine Äquivalenzrelation $\sim$ über Termen. Es gilt $s \sim t$ gdw.

- $s = t$ oder
- $s = f(s_1, \ldots, s_n), t = g(t_1, \ldots, t_n), f \equiv g$ und $s_i \sim t_i$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$

Für zwei Terme s und t bedeutet $s \sim t$ also, dass sich s von t nur dadurch unterscheidet, dass man manche Funktionssymbole f durch andere Funktionssymbole g mit $f \equiv g$ ersetzt hat.

Sei nun $\sqsupseteq$ eine beliebige, aber feste Quasi-Präzedenz. Dann gilt $s \succ_{qlpo} t$ gdw. $s = f(s_1, \ldots, s_n)$ und eine der folgenden Aussagen zutrifft.

1) $s_i \succsim_{qlpo} t$ für ein $i \in \{1, \ldots, n\}$
2) $t = g(t_1, \ldots, t_m), f \sqsupset g$ und $s \succ_{qlpo} t_i$ für alle $i \in \{1, \ldots, m\}$
3) $t = g(t_1, \ldots, t_n), f \equiv g$ und es ex. ein $i \in \{1, \ldots, n\}$, so dass $s_1 \sim t_1, \ldots, s_{i-1} \sim t_{i-1}, s_i \succ_{qlpo} t_i, s \succ_{qlpo} t_{i+1}, \ldots, s \succ_{qlpo} t_n$

Hierbei bezeichnet $\succsim_{qlpo} = \succ_{qlpo} \cup \sim$.

a) Beweisen Sie die Stabilität von $\succ_{qlpo}$.
b) Beweisen Sie die Terminierung der folgenden zwei TESe $\mathcal{R}_1$ und $\mathcal{R}_2$ über der Variablenmenge $\mathcal{V} = \{x\}$. Nutzen Sie, wenn möglich, die LPO, sonst die QLPO.

$$
\begin{array}{lrcl}
\mathcal{R}_1 : & \mathsf{g}(\mathsf{s}(x)) & \to & \mathsf{f}(x) \\
 & \mathsf{f}(\mathsf{0}) & \to & \mathsf{s}(\mathsf{0}) \\
 & \mathsf{f}(\mathsf{s}(x)) & \to & \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{g}(x))) \\
 & \mathsf{g}(\mathsf{0}) & \to & \mathsf{0}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lrcl}
\mathcal{R}_2 : & \mathsf{f}(\mathsf{0}) & \to & \mathsf{1} \\
 & \mathsf{f}(\mathsf{s}(x)) & \to & \mathsf{g}(\mathsf{f}(x)) \\
 & \mathsf{g}(x) & \to & \mathsf{plus}(x, \mathsf{s}(x)) \\
 & \mathsf{f}(\mathsf{s}(x)) & \to & \mathsf{plus}(\mathsf{f}(x), \mathsf{s}(\mathsf{f}(x)))
\end{array}
$$

Aufgabe 3 **(3+3 Punkte)**

a) Geben Sie eine sinnvolle Definition der QLPOS an, die auf einer Quasi-Präzedenz und einem Status basiert, die also die Erweiterung aus Aufgabe 2 auf die LPOS anwendet.
b) Finden Sie ein TES, dessen Terminerung mit QLPOS, jedoch weder mit QLPO noch mit LPOS gezeigt werden kann.