Algorithmus BASIC_COMPLETION$(\mathcal{E}, \succ)$

Eingabe: Ein Gleichungssystem $\mathcal{E}$ und eine Reduktionsordnung $\succ$.

Ausgabe: Ein zu $\mathcal{E}$ äquivalentes konvergentes TES $\mathcal{R}$ oder "*Fail*" oder Nicht-Terminierung.

1. Falls $s \equiv t \in \mathcal{E}$ mit $s \neq t$, $s \not\succ t$, $t \not\succ s$, dann gib "*Fail*" aus und brich ab.
2. Setze $i = 0$ und $\mathcal{R}_0 = \{l \to r | l \succ r$ und $l \equiv r \in \mathcal{E}$ oder $r \equiv l \in \mathcal{E}\}$.
3. Setze $\mathcal{R}_{i+1} = \mathcal{R}_i$.
4. Für alle $\langle s, t \rangle \in CP(\mathcal{R}_i)$:
   4.1. Berechne $\mathcal{R}_i$-Normalformen s' und t' von s und t.
   4.2. Falls $s' \neq t'$, $s' \not\succ t'$ und $t' \not\succ s'$, dann gib "*Fail*" aus und brich ab.
   4.3. Falls $s' \succ t'$, dann setze $\mathcal{R}_{i+1} = \mathcal{R}_{i+1} \cup \{s' \to t'\}$.
   4.4. Falls $t' \succ s'$, dann setze $\mathcal{R}_{i+1} = \mathcal{R}_{i+1} \cup \{t' \to s'\}$.
5. Falls $\mathcal{R}_{i+1} = \mathcal{R}_i$, dann gib $\mathcal{R}_i$ aus und brich ab.
6. Setze $i = i + 1$ und gehe zu Schritt 3.

Zentrale Gruppoide

$$\mathcal{E} = \{\mathsf{f}(\mathsf{f}(x,y),\mathsf{f}(y,z)) \equiv y\}$$

$$\mathcal{R}_0 = \{\mathsf{f}(\mathsf{f}(x,y),\mathsf{f}(y,z)) \to y\}$$

$$\mathsf{f}(y,z) \longleftarrow \mathsf{f}(\underline{\mathsf{f}(\mathsf{f}(x,y),\mathsf{f}(y,z))},\mathsf{f}(\mathsf{f}(y,z),z')) \longrightarrow \mathsf{f}(y,\mathsf{f}(\mathsf{f}(y,z),z'))$$

$$\mathsf{f}(x,y) \longleftarrow \mathsf{f}(\mathsf{f}(x',\mathsf{f}(x,y)),\underline{\mathsf{f}(\mathsf{f}(x,y),\mathsf{f}(y,z))}) \longrightarrow \mathsf{f}(\mathsf{f}(x',\mathsf{f}(x,y)),y)$$

$$\mathcal{R}_1 = \begin{array}{rcl} \{\mathsf{f}(\mathsf{f}(x,y),\mathsf{f}(y,z)) & \to & y, \\ \mathsf{f}(y,\mathsf{f}(\mathsf{f}(y,z),z')) & \to & \mathsf{f}(y,z), \\ \mathsf{f}(\mathsf{f}(x',\mathsf{f}(x,y)),y) & \to & \mathsf{f}(x,y)\} \end{array}$$

$$\mathcal{E} = \{\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x))) \equiv \mathsf{f}(\mathsf{g}(x)), \mathsf{g}(\mathsf{g}(x)) \equiv \mathsf{g}(x)\}$$

"Orientiere"

$$(\varnothing, \{\mathsf{fgf}(x) \to \mathsf{fg}(x), \mathsf{g}^2(x) \to \mathsf{g}(x)\})$$

"Generiere"
"Reduziere-Gleichung"
"Orientiere"

$$\begin{tikzcd}
 & \mathsf{fgfgf}(x) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\mathsf{fg}^2\mathsf{f}(x) \arrow[d] & & \mathsf{fgfg}(x) \arrow[d] \\
\mathsf{fgf}(x) & & \mathsf{fg}^2(x)
\end{tikzcd}$$

$$(\varnothing, \{\mathsf{fgf}(x) \to \mathsf{fg}(x), \mathsf{fgf}(x) \to \mathsf{fg}^2(x), \mathsf{g}^2(x) \to \mathsf{g}(x)\})$$

"Reduziere-Links" ohne Einschränkung

$$(\{\mathsf{fg}^2(x) \equiv \mathsf{fg}(x)\}, \{\mathsf{fgf}(x) \to \mathsf{fg}^2(x), \mathsf{g}^2(x) \to \mathsf{g}(x)\})$$

"Reduziere-Gleichung" & "Löschen"

$$(\varnothing, \{\mathsf{fgf}(x) \to \mathsf{fg}^2(x), \mathsf{g}^2(x) \to \mathsf{g}(x)\})$$

$(\varnothing, \{\mathsf{fgf}(x) \to \mathsf{fg}^{2^n}(x), \mathsf{g}^2(x) \to \mathsf{g}(x)\})$

"Generiere"
"Reduziere-Gleichung"
"Orientiere"

$$\begin{tikzcd}
 & \mathsf{fgfgf}(x) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\mathsf{fg}^{2^n+1}\mathsf{f}(x) \arrow[d, "*"] & & \mathsf{fgfg}^{2^n}(x) \arrow[d] \\
\mathsf{fgf}(x) & & \mathsf{fg}^{2^n}\mathsf{g}^{2^n}(x) = \mathsf{fg}^{2^{n+1}}(x)
\end{tikzcd}$$

$(\varnothing, \{\mathsf{fgf}(x) \to \mathsf{fg}^{2^n}(x), \mathsf{fgf}(x) \to \mathsf{fg}^{2^{n+1}}(x), \mathsf{g}^2(x) \to \mathsf{g}(x)\})$

"Reduziere-Links" ohne Einschränkung

$(\{\mathsf{fg}^{2^{n+1}}(x) \equiv \mathsf{fg}^{2^n}(x)\}, \{\mathsf{fgf}(x) \to \mathsf{fg}^{2^{n+1}}(x), \mathsf{g}^2(x) \to \mathsf{g}(x)\})$

"Reduziere-Gleichung" & "Löschen"

$(\varnothing, \{\mathsf{fgf}(x) \to \mathsf{fg}^{2^{n+1}}(x), \mathsf{g}^2(x) \to \mathsf{g}(x)\})$

$\mathcal{E}_\omega = \varnothing, \quad \mathcal{R}_\omega = \{\mathsf{g}^2(x) \to \mathsf{g}(x)\}$ nicht äquivalent zu usprünglichem $\mathcal{E}$!

Gruppe

$$\mathcal{E} = \{\mathsf{f}(x, \mathsf{f}(y, z)) \equiv \mathsf{f}(\mathsf{f}(x, y), z), \quad \mathsf{f}(x, \mathsf{e}) \equiv x, \quad \mathsf{f}(x, \mathsf{i}(x)) \equiv \mathsf{e}\}$$

“Orientiere”

$$(\varnothing, \{(G1), (G2), (G3)\}) \text{ mit } \begin{array}{rcll} \mathsf{f}(x, \mathsf{f}(y, z)) & \to & \mathsf{f}(\mathsf{f}(x, y), z) & (G1) \\ \mathsf{f}(x, \mathsf{e}) & \to & x & (G2) \\ \mathsf{f}(x, \mathsf{i}(x)) & \to & \mathsf{e} & (G3) \end{array}$$

“Generiere”
“Reduziere-Gleichung”
“Orientiere”

$$\begin{tikzcd} & \mathsf{f}(x, \underline{\mathsf{f}(y, \mathsf{i}(y))}) \arrow[dl, "(G1)"'] \arrow[dr, "(G3)"] & \\ \mathsf{f}(\mathsf{f}(x, y), \mathsf{i}(y)) & & \mathsf{f}(x, \mathsf{e}) \arrow[d, "(G2)"] \\ & & x \end{tikzcd}$$

$$(\varnothing, \{(G1), (G2), (G3), (G4)\}) \text{ mit } \mathsf{f}(\mathsf{f}(x, y), \mathsf{i}(y)) \to x \quad (G4)$$

$$\mathsf{f}(x,\mathsf{f}(y,z)) \to \mathsf{f}(\mathsf{f}(x,y),z) \quad (G1) \qquad \mathsf{f}(x,\mathsf{i}(x)) \to \mathsf{e} \quad (G3)$$

$$\mathsf{f}(x,\mathsf{e}) \to x \quad (G2) \qquad \mathsf{f}(\mathsf{f}(x,y),\mathsf{i}(y)) \to x \quad (G4)$$

$$\begin{tikzcd} & \mathsf{f}(\underline{\mathsf{f}(x,\mathsf{e})},\mathsf{i}(\mathsf{e})) \arrow[dl, "(G4)"'] \arrow[dr, "(G2)"] & \\ x & & \mathsf{f}(x,\mathsf{i}(\mathsf{e})) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \mathsf{f}(\underline{\mathsf{f}(x,\mathsf{i}(\mathsf{e}))},\mathsf{i}(\mathsf{i}(\mathsf{e}))) \arrow[dl, "(G4)"'] \arrow[dr, "(G5)"] & \\ x & & \mathsf{f}(x,\mathsf{i}(\mathsf{i}(\mathsf{e}))) \end{tikzcd}$$

$$\mathsf{f}(x,\mathsf{i}(\mathsf{e})) \to x \quad (G5) \qquad \mathsf{f}(x,\mathsf{i}(\mathsf{i}(\mathsf{e}))) \to x \quad (G6)$$

$$\begin{tikzcd} & \mathsf{f}(\mathsf{i}(\mathsf{e}),\mathsf{i}(\mathsf{i}(\mathsf{e}))) \arrow[dl, "(G3)"'] \arrow[dr, "(G6)"] & \\ \mathsf{e} & & \mathsf{i}(\mathsf{e}) \end{tikzcd}$$

Lösche $(G5)$ und $(G6)$!

$$\mathsf{i}(\mathsf{e}) \to \mathsf{e} \quad (G7)$$

$$
\begin{aligned}
\mathsf{f}(x,\mathsf{f}(y,z)) &\to \mathsf{f}(\mathsf{f}(x,y),z) && (G1) \\
\mathsf{f}(x,\mathsf{e}) &\to x && (G2) \\
\mathsf{f}(x,\mathsf{i}(x)) &\to \mathsf{e} && (G3)
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\mathsf{f}(\mathsf{f}(x,y),\mathsf{i}(y)) &\to x && (G4) \\
\mathsf{i}(\mathsf{e}) &\to \mathsf{e} && (G7)
\end{aligned}
$$

$$x \xleftarrow{(G4)} \mathsf{f}(\underline{\mathsf{f}(x,\mathsf{i}(x))},\mathsf{i}(\mathsf{i}(x))) \xrightarrow{(G3)} \mathsf{f}(\mathsf{e},\mathsf{i}(\mathsf{i}(x)))$$

$$\mathsf{f}(\mathsf{f}(x,\mathsf{e}),\mathsf{i}(\mathsf{i}(y))) \xleftarrow{(G1)} \mathsf{f}(x,\underline{\mathsf{f}(\mathsf{e},\mathsf{i}(\mathsf{i}(y)))}) \xrightarrow{(G8)} \mathsf{f}(x,y)$$

$$\mathsf{f}(\mathsf{f}(x,\mathsf{e}),\mathsf{i}(\mathsf{i}(y))) \xrightarrow{(G2)} \mathsf{f}(x,\mathsf{i}(\mathsf{i}(y)))$$

$$\mathsf{f}(\mathsf{e},\mathsf{i}(\mathsf{i}(x))) \to x \quad (G8) \qquad\qquad \mathsf{f}(x,\mathsf{i}(\mathsf{i}(y))) \to \mathsf{f}(x,y) \quad (G9)$$

"Reduziere-Links" und "Orientieren" überführt $(G8)$ in

$$\mathsf{f}(\mathsf{e},x) \to x \quad (G10)$$

$$\begin{aligned} \mathsf{f}(x,\mathsf{f}(y,z)) &\to \mathsf{f}(\mathsf{f}(x,y),z) & (G1)\\ \mathsf{f}(x,\mathsf{e}) &\to x & (G2)\\ \mathsf{f}(x,\mathsf{i}(x)) &\to \mathsf{e} & (G3)\\ \mathsf{f}(\mathsf{f}(x,y),\mathsf{i}(y)) &\to x & (G4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathsf{i}(\mathsf{e}) &\to \mathsf{e} & (G7)\\ \mathsf{f}(x,\mathsf{i}(\mathsf{i}(y))) &\to \mathsf{f}(x,y) & (G9)\\ \mathsf{f}(\mathsf{e},x) &\to x & (G10) \end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd} & \mathsf{f}(\mathsf{e},\mathsf{i}(\mathsf{i}(x))) \arrow[dl, "(G9)"'] \arrow[dr, "(G10)"] & \\ \mathsf{f}(\mathsf{e},x) \arrow[d, "(G10)"] & & \mathsf{i}(\mathsf{i}(x)) \\ x & & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & \mathsf{f}(\mathsf{i}(x),\underline{\mathsf{i}(\mathsf{i}(x))}) \arrow[dl, "(G3)"'] \arrow[dr, "(G11)"] & \\ \mathsf{e} & & \mathsf{f}(\mathsf{i}(x),x) \end{tikzcd}$$

$$\mathsf{i}(\mathsf{i}(x)) \to x \quad (G11)$$

$$\mathsf{f}(\mathsf{i}(x),x) \to \mathsf{e} \quad (G12)$$

Lösche $(G9)$!

$$\begin{array}{rcll} \mathsf{f}(x,\mathsf{f}(y,z)) & \to & \mathsf{f}(\mathsf{f}(x,y),z) & (G1) \\ \mathsf{f}(x,\mathsf{e}) & \to & x & (G2) \\ \mathsf{f}(x,\mathsf{i}(x)) & \to & \mathsf{e} & (G3) \\ \mathsf{f}(\mathsf{f}(x,y),\mathsf{i}(y)) & \to & x & (G4) \end{array} \qquad \begin{array}{rcll} \mathsf{i}(\mathsf{e}) & \to & \mathsf{e} & (G7) \\ \mathsf{f}(\mathsf{e},x) & \to & x & (G10) \\ \mathsf{i}(\mathsf{i}(x)) & \to & x & (G11) \\ \mathsf{f}(\mathsf{i}(x),x) & \to & \mathsf{e} & (G12) \end{array}$$

$$\mathsf{f}(x,\underline{\mathsf{f}(\mathsf{i}(y),y)})$$

$$\mathsf{f}(\mathsf{f}(x,\mathsf{i}(y)),y) \xleftarrow{(G1)} \mathsf{f}(x,\underline{\mathsf{f}(\mathsf{i}(y),y)}) \xrightarrow{(G12)} \mathsf{f}(x,\mathsf{e}) \xrightarrow{(G2)} x$$

$$\mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{i}(\mathsf{f}(x,y)),x),y) \xleftarrow{(G1)} \mathsf{f}(\mathsf{i}(\mathsf{f}(x,y)),\mathsf{f}(x,y)) \xrightarrow{(G12)} \mathsf{e}$$

$$\mathsf{f}(\mathsf{f}(x,\mathsf{i}(y)),y) \;\to\; x \quad (G13) \qquad\qquad \mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{i}(\mathsf{f}(x,y)),x),y) \;\to\; \mathsf{e} \quad (G14)$$

$$\mathsf{f}(\mathsf{i}(\mathsf{f}(x,y)),x) \xleftarrow{(G4)} \mathsf{f}(\underline{\mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{i}(\mathsf{f}(x,y)),x),y)},\mathsf{i}(y)) \xrightarrow{(G14)} \mathsf{f}(\mathsf{e},\mathsf{i}(y)) \xrightarrow{(G10)} \mathsf{i}(y)$$

$$\mathsf{f}(\mathsf{i}(\mathsf{f}(x,y)),x) \;\to\; \mathsf{i}(y) \quad (G15)$$

Lösche $(G14)$!

$$
\begin{array}{rcll}
\mathsf{f}(x,\mathsf{f}(y,z)) & \to & \mathsf{f}(\mathsf{f}(x,y),z) & (G1)\\
\mathsf{f}(x,\mathsf{e}) & \to & x & (G2)\\
\mathsf{f}(x,\mathsf{i}(x)) & \to & \mathsf{e} & (G3)\\
\mathsf{f}(\mathsf{f}(x,y),\mathsf{i}(y)) & \to & x & (G4)\\
\mathsf{i}(\mathsf{e}) & \to & \mathsf{e} & (G7)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcll}
\mathsf{f}(\mathsf{e},x) & \to & x & (G10)\\
\mathsf{i}(\mathsf{i}(x)) & \to & x & (G11)\\
\mathsf{f}(\mathsf{i}(x),x) & \to & \mathsf{e} & (G12)\\
\mathsf{f}(\mathsf{f}(x,\mathsf{i}(y)),y) & \to & x & (G13)\\
\mathsf{f}(\mathsf{i}(\mathsf{f}(x,y)),x) & \to & \mathsf{i}(y) & (G15)
\end{array}
$$

$$
\mathsf{i}(\mathsf{f}(x,y)) \xleftarrow{(G4)} \mathsf{f}(\underline{\mathsf{f}(\mathsf{i}(\mathsf{f}(x,y)),x)},\mathsf{i}(x)) \xrightarrow{(G15)} \mathsf{f}(\mathsf{i}(y),\mathsf{i}(x))
$$

$$
\mathsf{i}(\mathsf{f}(x,y)) \to \mathsf{f}(\mathsf{i}(y),\mathsf{i}(x)) \quad (G16)
$$

Lösche $(G15)$!

Zu $\mathcal{E}$ äquivalentes konvergentes TES:

$$\{(G1)-(G4),(G7),(G10)-(G13),(G16)\}$$