Prof. Dr. Jürgen Giesl

Marc Brockschmidt, Carsten Fuhs, Thomas Ströder

Notes:

- Please solve these exercises in **groups of two**!
- The solutions must be handed in **directly before (very latest: at the beginning of)** the exercise course on Wednesday, May 11th, 2011, in lecture hall **AH 2**. Alternatively you can drop your solutions into a box which is located right next to Prof. Giesl's office (until the exercise course starts).
- Please write the **names** and **immatriculation numbers** of all (two) students on your solution. Please staple the individual sheets!
- This whole exercise sheet is **only** relevant for students attending the **V4 (Diplom Informatik and Diplom Mathematik)** version of the lecture. For all other students, the exercises on this sheet do not contribute to the overall number of points that will be required for the exam qualification.
- Exercises or exercise parts marked with a star are voluntary **challenge** exercises with advanced difficulty. However, they do not contribute to the overall number of points that will be required for the exam qualification or for the Übungsschein, respectively.
- Since the lectures corresponding to the topics of this exercise sheet have been held in German, also this exercise sheet is made available in German. Please send a mail to `tes11@i2.informatik.rwth-aachen.de` if you require an English version of this exercise sheet. As usual, you can choose if you wish to hand in your solutions in English or in German.

---

## Exercise 1 (Anwendung des Kongruenzabschlusses): (2 + 3 + 3 = 8 points)

Gegeben sei das folgende Code-Fragment eines imperativen Programms.

```
a = c;
d = f[f[c]];
f[c] = f[f[f[b]]];
if ( f[b] == a ) {
   (*)
}
```

Das Fragment wurde in das folgende Termgleichungssystem $\mathcal{E}$ übersetzt.

$$\begin{aligned} \mathsf{a} &\equiv \mathsf{c} \\ \mathsf{d} &\equiv \mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{c})) \\ \mathsf{f}(\mathsf{c}) &\equiv \mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{b}))) \\ \mathsf{f}(\mathsf{b}) &\equiv \mathsf{a} \end{aligned}$$

**a)** Zeigen Sie mittels $\leftrightarrow_{\mathcal{E}}^*$, dass $\mathsf{d} \equiv_{\mathcal{E}} \mathsf{f}(\mathsf{c})$ gilt.

**b)** Zeigen Sie mittels des Kongruenzabschlusses, dass $\mathsf{d} \equiv_{\mathcal{E}} \mathsf{f}(\mathsf{c})$ gilt.

**c)** Geben Sie eine Anfangsbelegung der Variablen `a`, `b`, `c`, `d` und des Arrays `f` an, so dass an der Stelle `(*)` der Wert von `d` ungleich dem von `f[c]` ist. Wo liegt das Problem?

## Exercise 2 (Der Algorithmus KONGRUENZABSCHLUSS): (4 points)

Gegeben sei das Termgleichungssystem $\mathcal{E}$, das aus folgenden Grundidentitäten besteht:

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{a} & \equiv & \mathsf{b} \\ \mathsf{c} & \equiv & \mathsf{f}(\mathsf{d}) \\ \mathsf{f}(\mathsf{b}) & \equiv & \mathsf{g}(\mathsf{a}) \\ \mathsf{d} & \equiv & \mathsf{c} \\ \mathsf{g}(\mathsf{b}) & \equiv & \mathsf{d} \end{array}$$

Entscheiden Sie $\mathsf{g}(\mathsf{c}) \equiv_{\mathcal{E}} \mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{a}))$ mittels des Algorithmus KONGRUENZABSCHLUSS aus der Vorlesung. Geben Sie die Menge $S$ sowie als Zwischenergebnisse die Mengen $L$ in jedem Durchlauf von Schritt 4 an.

## Exercise 3 (Kongruenzabschluss für Allgemeingültigkeit): (6 + 3* + 3 = 9 + 3* points)

Ziel der Aufgabe ist es, ein Entscheidungsverfahren für die Allgemeingültigkeit von (implizit) allquantifizierten First-Order-Logik Formeln (FO-Formeln) zu entwickeln. FO-Formeln bestehen aus Termgleichungen und können mittels der Booleschen Operatoren $\neg, \vee, \wedge$ auf die übliche Art verbunden werden. Beispielsweise ist $\varphi = \neg(x \equiv \mathsf{f}(\mathsf{f}(x)) \wedge x \equiv \mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{f}(x)))))) \vee x \equiv \mathsf{f}(x)$ eine FO-Formel mit $x \in \mathcal{V}$. Für Interpretationen $I = (\mathcal{A}, \alpha, \beta)$ ist die Modellbeziehung für FO-Formeln in der üblichen Weise definiert:

- $I \models \varphi_1 \vee \varphi_2$ gdw. $I \models \varphi_1$ oder $I \models \varphi_2$
- $I \models \varphi_1 \wedge \varphi_2$ gdw. $I \models \varphi_1$ und $I \models \varphi_2$
- $I \models \neg\varphi$ gdw. $I \not\models \varphi$
- $I \models u \equiv v$ gdw. $I(u) = I(v)$

Eine FO-Formel $\varphi$ heißt *allgemeingültig* gdw. für alle Interpretationen $I$ der Zusammenhang $I \models \varphi$ gilt. Eine FO-Formel $\varphi$ heißt *unerfüllbar* gdw. es keine Interpretation $I$ mit $I \models \varphi$ gibt.

**a)** Entwickeln Sie unter Nutzung des Kongruenzabschlussverfahrens ein Entscheidungsverfahren für die Allgemeingültigkeit von FO-Formeln. Hinweise:

- Zeigen Sie, wie man die Allgemeingültigkeit von FO-Formeln mit Variablen auf die Allgemeingültigkeit von FO-Formeln ohne Variablen zurückführen kann.
- Führen Sie die Allgemeingültigkeit von FO-Formeln auf die Unerfüllbarkeit mehrerer Konjunktionen der Art $u_1 \equiv v_1 \wedge \dots \wedge u_n \equiv v_n \wedge \neg s_1 \equiv t_1 \wedge \dots \wedge \neg s_m \equiv t_m$ zurück.
- Benutzen Sie das folgende Lemma für Grundterme $s_i, t_i, u_j, v_j$ mit $i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, n\}$:[1]
  Wenn es Algebren $A_1, \dots, A_m$ mit $A_i \models u_1 \equiv v_1 \wedge \dots \wedge u_n \equiv v_n \wedge \neg s_i \equiv t_i$ $(i \in \{1, \dots, m\})$ gibt, dann gibt es auch eine Algebra $A$ mit $A \models u_1 \equiv v_1 \wedge \dots \wedge u_n \equiv v_n \wedge \neg s_1 \equiv t_1 \wedge \dots \wedge \neg s_m \equiv t_m$ (und umgekehrt).

**b)** Wenden Sie Ihr Verfahren an, um die Allgemeingültigkeit der oben angegebenen FO-Formel $\varphi$ nachzuweisen.

[1] und beweisen Sie es für die Zusatzpunkte