- **Rewrite Relation:** $s \rightarrow_{\mathcal{E}} t$ iff $s|_\pi = t_1\sigma$ and $t = s[t_2\sigma]_\pi$ for $t_1 \equiv t_2 \in \mathcal{E}$
- **Proof Relation:** $s \leftrightarrow^*_{\mathcal{E}} t$ iff $s = s_0 \leftrightarrow_{\mathcal{E}} s_1 \leftrightarrow_{\mathcal{E}} \ldots \leftrightarrow_{\mathcal{E}} s_n = t$
- **Derivation:** $\mathcal{E} \vdash s \equiv t$ iff $s \leftrightarrow^*_{\mathcal{E}} t$

Axions:

$$\begin{aligned} \mathsf{plus}(\mathcal{O}, y) &\equiv y \\ \mathsf{plus}(\mathsf{succ}(x), y) &\equiv \mathsf{succ}(\mathsf{plus}(x, y)) \end{aligned}$$

$\underline{\mathsf{plus}(\mathsf{succ}^2(\mathcal{O}), x)}$	$\mathsf{plus}(\mathsf{succ}(x), y) \equiv \mathsf{succ}(\mathsf{plus}(x, y))$	$\sigma = \{x/\mathsf{succ}(\mathcal{O}), y/x\}$
$\mathsf{succ}(\underline{\mathsf{plus}(\mathsf{succ}(\mathcal{O}), x)})$	$\mathsf{plus}(\mathsf{succ}(x), y) \equiv \mathsf{succ}(\mathsf{plus}(x, y))$	$\sigma = \{x/\mathcal{O}, y/x\}$
$\mathsf{succ}^2(\underline{\mathsf{plus}(\mathcal{O}, x)})$	$\mathsf{plus}(\mathcal{O}, y) \equiv y$	$\sigma = \{y/x\}$
$\mathsf{succ}(\underline{\mathsf{succ}(x)})$	$y \equiv \mathsf{plus}(\mathcal{O}, y)$	$\sigma = \{y/\mathsf{succ}(x)\}$
$\underline{\mathsf{succ}(\mathsf{plus}(\mathcal{O}, \mathsf{succ}(x)))}$	$\mathsf{succ}(\mathsf{plus}(x, y)) \equiv \mathsf{plus}(\mathsf{succ}(x), y)$	$\sigma = \{x/\mathcal{O}, y/\mathsf{succ}(x)\}$
$\mathsf{plus}(\mathsf{succ}(\mathcal{O}), \mathsf{succ}(x))$		

$\equiv_{\mathcal{E}}$ and $\leftrightarrow^*_{\mathcal{E}}$ are *stable* and *monotonic congruence relations*