Thm 3.2.12: $s \equiv_{\mathcal{E}} t$ iff $s \equiv t \in CC^S(\mathcal{E})$

- $S = Subterms(\mathcal{E}) \cup Subterms(s) \cup Subterms(t)$
- $\mathcal{E}_0^S = (\mathcal{E} \cup R) \ \cap \ S \times S$
- $\mathcal{E}_{i+1}^S = (\mathcal{E}_i^S \cup S(\mathcal{E}_i^S) \cup T(\mathcal{E}_i^S) \cup C(\mathcal{E}_i^S)) \ \cap \ S \times S$
- Congruence closure w.r.t. S: $CC^S(\mathcal{E}) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{E}_i^S$

$\mathcal{E} = \{\mathsf{i} \equiv \mathsf{j}, \mathsf{k} \equiv \mathsf{l}, \mathsf{f}(\mathsf{i}) \equiv \mathsf{g}(\mathsf{k}), \mathsf{j} \equiv \mathsf{f}(\mathsf{j}), \mathsf{m} \equiv \mathsf{g}(\mathsf{l})\}$ $\quad s = \mathsf{f}(\mathsf{m})$ $\quad t = \mathsf{g}(\mathsf{k})$

$S = \{\mathsf{i}, \mathsf{j}, \mathsf{k}, \mathsf{l}, \mathsf{m}, \mathsf{f}(\mathsf{i}), \mathsf{f}(\mathsf{j}), \mathsf{f}(\mathsf{m}), \mathsf{g}(\mathsf{k}), \mathsf{g}(\mathsf{l})\}$

$\mathcal{E}_0^S = \mathcal{E} \cup \{\mathsf{i} \equiv \mathsf{i}, \ldots, \mathsf{g}(\mathsf{l}) \equiv \mathsf{g}(\mathsf{l})\}$

$\mathcal{E}_1^S = \mathcal{E}_0^S \cup \{\mathsf{j} \equiv \mathsf{i}, \ldots, \mathsf{g}(\mathsf{l}) \equiv \mathsf{m}\} \cup \{\mathsf{i} \equiv \mathsf{f}(\mathsf{j})\} \cup \{\mathsf{f}(\mathsf{i}) \equiv \mathsf{f}(\mathsf{j}), \mathsf{g}(\mathsf{k}) \equiv \mathsf{g}(\mathsf{l})\}$

$\mathcal{E} = \{\mathsf{i} \equiv \mathsf{j}, \mathsf{k} \equiv \mathsf{l}, \mathsf{f(i)} \equiv \mathsf{g(k)}, \mathsf{j} \equiv \mathsf{f(j)}, \mathsf{m} \equiv \mathsf{g(l)}\}$ $\quad s = \mathsf{f(m)}$ $\quad t = \mathsf{g(k)}$

$S = \{\mathsf{i}, \mathsf{j}, \mathsf{k}, \mathsf{l}, \mathsf{m}, \mathsf{f(i)}, \mathsf{f(j)}, \mathsf{f(m)}, \mathsf{g(k)}, \mathsf{g(l)}\}$

Due to $\mathcal{E}$: $\{\mathsf{i}, \mathsf{j}\}$, $\{\mathsf{k}, \mathsf{l}\}$, $\{\mathsf{f(i)}, \mathsf{g(k)}\}$, $\{\mathsf{j}, \mathsf{f(j)}\}$, $\{\mathsf{m}, \mathsf{g(l)}\}$,

Due to S: $\{\mathsf{i}\}$, $\{\mathsf{j}\}$, $\{\mathsf{k}\}$, $\{\mathsf{l}\}$, $\{\mathsf{m}\}$, $\{\mathsf{f(i)}\}$, $\{\mathsf{f(j)}\}$, $\{\mathsf{f(m)}\}$, $\{\mathsf{g(k)}\}$, $\{\mathsf{g(l)}\}$

Step 1: equivalence relation

$S_0 : \{\mathsf{i}, \mathsf{j}, \mathsf{f(j)}\}$, $\{\mathsf{k}, \mathsf{l}\}$, $\{\mathsf{f(i)}, \mathsf{g(k)}\}$, $\{\mathsf{m}, \mathsf{g(l)}\}$, $\{\mathsf{f(m)}\}$

Step 2: congruence

$\{\mathsf{i}, \mathsf{j}, \mathsf{f(j)}\}$, $\{\mathsf{k}, \mathsf{l}\}$, $\{\mathsf{f(i)}, \mathsf{g(k)}\}$, $\{\mathsf{m}, \mathsf{g(l)}\}$, $\{\mathsf{f(m)}\}$,
$\{\mathsf{f(i)}, \mathsf{f(j)}\}$, $\{\mathsf{g(k)}, \mathsf{g(l)}\}$

Step 3: equivalence relation

$S_1 : \{\mathsf{i}, \mathsf{j}, \mathsf{f(j)}, \mathsf{f(i)}, \mathsf{g(k)}, \mathsf{g(l)}, \mathsf{m}\}$, $\{\mathsf{k}, \mathsf{l}\}$, $\{\mathsf{f(m)}\}$

Step 4: congruence

$\{\mathsf{i}, \mathsf{j}, \mathsf{f(j)}, \mathsf{f(i)}, \mathsf{g(k)}, \mathsf{g(l)}, \mathsf{m}\}$, $\{\mathsf{k}, \mathsf{l}\}$, $\{\mathsf{f(m)}\}$,
$\{\mathsf{f(i)}, \mathsf{f(j)}\}$, $\{\mathsf{f(i)}, \mathsf{f(m)}\}$, $\{\mathsf{f(j)}, \mathsf{f(m)}\}$, $\{\mathsf{g(k)}, \mathsf{g(l)}\}$

Step 5: equivalence relation

$S_2 : \{\mathsf{i}, \mathsf{j}, \mathsf{f(j)}, \mathsf{f(i)}, \mathsf{g(k)}, \mathsf{g(l)}, \mathsf{m}, \mathsf{f(m)}\}$, $\{\mathsf{k}, \mathsf{l}\}$