Term Rewriting Systems

Florian Frohn

27. November 2015

Exercise 1

Orient the following equations such that the resulting TRS is convergent:

$$\begin{aligned}
\mathsf{a}(x) &\equiv \mathsf{c}(\mathsf{a}(x)) \\
\mathsf{a}(\mathsf{d}) &\equiv \mathsf{b}(x) \\
\mathsf{b}(\mathsf{d}) &\equiv \mathsf{c}(\mathsf{d}) \\
\mathsf{b}(\mathsf{b}(x)) &\equiv \mathsf{b}(\mathsf{c}(x)) \\
\mathsf{b}(x) &\equiv \mathsf{e}(x)
\end{aligned}$$

Exercise 1

$$\begin{aligned} \mathsf{a}(x) &\equiv \mathsf{c}(\mathsf{a}(x)) \\ \mathsf{a}(\mathsf{d}) &\equiv \mathsf{b}(x) \\ \mathsf{b}(\mathsf{d}) &\equiv \mathsf{c}(\mathsf{d}) \\ \mathsf{b}(\mathsf{b}(x)) &\equiv \mathsf{b}(\mathsf{c}(x)) \\ \mathsf{b}(x) &\equiv \mathsf{e}(x) \end{aligned}$$

1. $\mathsf{c}(\mathsf{a}(x)) \to \mathsf{a}(x)$ (termination)
2. $\mathsf{b}(x) \to \mathsf{a}(\mathsf{d})$ (variable condition)
3. $\mathsf{c}(\mathsf{d}) \to \mathsf{b}(\mathsf{d})$ (confluence)
   - $\mathsf{b}(\mathsf{d}) \to_{2.} \mathsf{a}(\mathsf{d})$
   - $\mathsf{a}(\mathsf{d})$ is a normal form
   - $\mathsf{c}(\mathsf{d}) \not\to^{*} \mathsf{a}(\mathsf{d})$
4. $\mathsf{b}(\mathsf{c}(x)) \to \mathsf{b}(\mathsf{b}(x))$ (termination)
   - $\mathsf{b}(\mathsf{b}(\mathsf{d})) \to \mathsf{b}(\mathsf{c}(\mathsf{d})) \to \mathsf{b}(\mathsf{b}(\mathsf{d})) \to \dots$
5. $\mathsf{e}(x) \to \mathsf{b}(x)$ (confluence)
   - $\mathsf{b}(x) \to_{2.} \mathsf{a}(\mathsf{d})$
   - $\mathsf{a}(\mathsf{d})$ is a normal form
   - $\mathsf{e}(x) \not\to^{*} \mathsf{a}(\mathsf{d})$

Exercise 1

$$
\begin{array}{rcll}
\mathsf{c}(\mathsf{a}(x)) & \to & \mathsf{a}(x) & (1) \\
\mathsf{b}(x) & \to & \mathsf{a}(\mathsf{d}) & (2) \\
\mathsf{c}(\mathsf{d}) & \to & \mathsf{b}(\mathsf{d}) & (3) \\
\mathsf{b}(\mathsf{c}(x)) & \to & \mathsf{b}(\mathsf{b}(x)) & (4) \\
\mathsf{e}(x) & \to & \mathsf{b}(x) & (5)
\end{array}
$$

Decide using the algorithm WORD_PROBLEM:

$$
\begin{array}{rcl}
\mathsf{c(a(a(b(e(e(b(c(d))))))))} & \equiv_{\mathcal{E}} & \mathsf{c(a(b(a(e(c(a(a(d))))))))} \\
\mathsf{c(a(b(a(e(e(c(c(d))))))))} & \equiv_{\mathcal{E}} & \mathsf{a(e(e(e(e(e(e(c(d))))))))}
\end{array}
$$

$$\underline{\mathsf{caabeebcd}} \to \mathsf{aa}\underline{\mathsf{beebcd}} \to \mathsf{aaad}$$

$$\underline{\mathsf{cabaecaad}} \to \mathsf{a}\underline{\mathsf{baecaad}} \to \mathsf{aad}$$

$$\underline{\mathsf{cabaeeccd}} \to \mathsf{a}\underline{\mathsf{baeeccd}} \to \mathsf{aad}$$

$$\mathsf{a}\underline{\mathsf{eeeeeecd}} \to \mathsf{a}\underline{\mathsf{beeeeecd}} \to \mathsf{aad}$$

Exercise 2

$$\begin{aligned} \mathsf{ack}(\mathcal{O}, m) &\to \mathsf{s}(m) \\ \mathsf{ack}(\mathsf{s}(n), \mathcal{O}) &\to \mathsf{ack}(n, \mathsf{s}(\mathcal{O})) \\ \mathsf{ack}(\mathsf{s}(n), \mathsf{s}(m)) &\to \mathsf{ack}(n, \mathsf{ack}(\mathsf{s}(n), m)) \end{aligned}$$

Prove that any normal form of $\mathsf{ack}(\mathsf{s}^n(\mathcal{O}), \mathsf{s}^m(\mathcal{O}))$ has the form $\mathsf{s}^\ell(\mathcal{O})$ by Noetherian induction.

Exercise 2

$$\begin{aligned}
\mathsf{ack}(\mathcal{O}, m) &\to \mathsf{s}(m) \\
\mathsf{ack}(\mathsf{s}(n), \mathcal{O}) &\to \mathsf{ack}(n, \mathsf{s}(\mathcal{O})) \\
\mathsf{ack}(\mathsf{s}(n), \mathsf{s}(m)) &\to \mathsf{ack}(n, \mathsf{ack}(\mathsf{s}(n), m))
\end{aligned}$$

- let $(\mathsf{s}^{n_1}(\mathcal{O}), \mathsf{s}^{k_1}(\mathcal{O})) \succ (\mathsf{s}^{n_2}(\mathcal{O}), \mathsf{s}^{k_2}(\mathcal{O}))$ iff $n_1 > n_2 \vee (n_1 = n_2 \wedge k_1 > k_2)$
- Assume there is a chain $(\mathsf{s}^{n_1}(\mathcal{O}), \mathsf{s}^{k_1}(\mathcal{O})) \succ (\mathsf{s}^{n_2}(\mathcal{O}), \mathsf{s}^{k_2}(\mathcal{O})) \succ \dots$
- Infinitely many "$n_1 > n_2$" steps
  - $n_1 = \dots = n_{a_1} > n_{a_1+1} = \dots = n_{a_2} > n_{a_2+1} \dots$
- Finitely many "$n_1 > n_2$" steps $\implies$ infinitely many "$k_1 > k_2$" steps
  - after the last "$n_1 > n_2$" step, we get $k_{a_1} > k_{a_2} > \dots$

Exercise 2

$$\begin{aligned} \mathsf{ack}(\mathcal{O}, m) &\to \mathsf{s}(m) \\ \mathsf{ack}(\mathsf{s}(n), \mathcal{O}) &\to \mathsf{ack}(n, \mathsf{s}(\mathcal{O})) \\ \mathsf{ack}(\mathsf{s}(n), \mathsf{s}(m)) &\to \mathsf{ack}(n, \mathsf{ack}(\mathsf{s}(n), m)) \end{aligned}$$

To show: any normal form of $\mathsf{ack}(\mathsf{s}^n(\mathcal{O}), \mathsf{s}^m(\mathcal{O}))$ has the form $\mathsf{s}^\ell(\mathcal{O})$

- Case $n = 0$: trivial
- Case $n > 0, m = 0$
  - $\mathsf{ack}(\mathsf{s}^n(\mathcal{O}), \mathcal{O}) \to \mathsf{ack}(\mathsf{s}^{n-1}(\mathcal{O}), \mathsf{s}(\mathcal{O}))$
  - $(\mathsf{s}^n(\mathcal{O}), \mathcal{O}) \succ (\mathsf{s}^{n-1}(\mathcal{O}), \mathsf{s}(\mathcal{O}))$

  IH $\mathsf{ack}(\mathsf{s}^{n-1}(\mathcal{O}), \mathsf{s}(\mathcal{O})) \to^* \mathsf{s}^\ell(\mathcal{O})$
- Case $n > 0, m > 0$
  - $\mathsf{ack}(\mathsf{s}^n(\mathcal{O}), \mathsf{s}^m(\mathcal{O})) \to \mathsf{ack}(\mathsf{s}^{n-1}(\mathcal{O}), \mathsf{ack}(\mathsf{s}^n(\mathcal{O}), \mathsf{s}^{m-1}(\mathcal{O})))$

  IH $\mathsf{ack}(\mathsf{s}^{n-1}(\mathcal{O}), \mathsf{ack}(\mathsf{s}^n(\mathcal{O}), \mathsf{s}^{m-1}(\mathcal{O}))) \to^* \mathsf{ack}(\mathsf{s}^{n-1}(\mathcal{O}), \mathsf{s}^\ell(\mathcal{O}))$

  IH $\mathsf{ack}(\mathsf{s}^{n-1}(\mathcal{O}), \mathsf{s}^\ell(\mathcal{O})) \to^* \mathsf{s}^{\ell'}(\mathcal{O})$

Exercise 3

Prove/disprove termination using RIGHT_GROUND_TERMINATION.

$$\begin{aligned} f(f(x,y),z) &\rightarrow f(b,f(b,a)) \\ f(a,f(x,y)) &\rightarrow f(f(b,a),a) \\ f(x,b) &\rightarrow f(b,a) \\ f(b,x) &\rightarrow b \end{aligned}$$

T_1	T_2	T_3	T_4
f(b, f(b, a))	f(f(b, a), a)	f(b, a)	b
b ; f(b, b)	f(b, f(b, a)) ; f(b, a)	b	$\emptyset$
b ; f(b, a)	b ; f(b, b)	$\emptyset$	
b	b ; f(b, a)		
$\emptyset$	b		
	$\emptyset$		

Exercise 3

Prove/disprove termination using RIGHT_GROUND_TERMINATION.

$$\begin{aligned} f(s(x), g(x)) &\rightarrow g(s(a)) \\ f(s(x), s(x)) &\rightarrow g(f(s(a), g(s(a)))) \\ g(s(x)) &\rightarrow s(a) \end{aligned}$$

T_1	T_2	
g(s(a))	g(f(s(a), g(s(a))))	s(a)
s(a)	g(f(s(a), s(a)))	$\emptyset$
$\emptyset$	g(g(f(s(a), g(s(a)))))	