Strukturelle Induktion zum Beweis von $\forall x : s \;\; \psi$

$$
\begin{array}{lcl}
\multicolumn{3}{l}{\textbf{structure} \;\; s} \\
\quad cons_1 & : & s_{1,1} \times \ldots \times s_{1,n_1} \rightarrow s \\
 & \vdots & \\
\quad cons_m & : & s_{m,1} \times \ldots \times s_{m,n_m} \rightarrow s
\end{array}
$$

- $ref(i) = \{j \mid s_{i,j} = s\}$

- Induktionsformel ψ_i
  $\forall y_1 : s_{i,1}, \ldots, y_{n_i} : s_{i,n_i} \;\; \bigwedge_{j \in ref(i)} \psi[x/y_j] \;\rightarrow\; \psi[x/cons_i(y_1, \ldots, y_{n_i})]$

- Strukturelle Relation der Datenstruktur s
  $cons_i(q_1, \ldots, q_{n_i}) \succ_s q_j$

- Strukturelles Induktionsaxiom der Datenstruktur s
  $\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_m \rightarrow \forall x : s \;\; \psi$

$$\begin{array}{lll} \textbf{structure} & \mathsf{num} & \\ \mathcal{O} & : & \mathsf{num} \\ \mathsf{succ} & : & \mathsf{num} \to \mathsf{num} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \multicolumn{3}{l}{\textbf{function}\ \ \mathsf{plus} : \mathsf{num} \times \mathsf{num} \to \mathsf{num}} \\ \mathsf{plus}(\mathcal{O}, y) & \equiv & y \\ \mathsf{plus}(\mathsf{succ}(x), y) & \equiv & \mathsf{succ}(\mathsf{plus}(x, y)) \end{array}$$

- Induktionsformeln bei struktureller Induktion gemäß num

  $\psi_1 : \quad \psi[x_1/\mathcal{O}]$

  $\psi_2 : \quad \forall x : \mathsf{num}\ \ \psi[x_1/x] \to \psi[x_1/\mathsf{succ}(x)]$

- Strukturelle Relation der Datenstruktur num

  $\ldots \succ_{\mathsf{num}} \mathsf{succ}(\mathsf{succ}(\mathcal{O})) \succ_{\mathsf{num}} \mathsf{succ}(\mathcal{O}) \succ_{\mathsf{num}} \mathcal{O}$

- Induktionsformeln bei Induktion gemäß Alg. plus

  $\psi_1 : \quad \forall x, y : \mathsf{num}\ \ \psi[x_1/\mathcal{O}, x_2/y]$

  $\psi_2 : \quad \forall x, y : \mathsf{num}\ \ \psi[x_1/x, x_2/y] \to \psi[x_1/\mathsf{succ}(x), x_2/y]$

- Berechnungsrelation des Algorithmus plus

  $\ldots \succ_{\mathsf{plus}} (\mathsf{succ}(\mathsf{succ}(\mathcal{O})), \mathsf{succ}(\mathcal{O})) \succ_{\mathsf{plus}} (\mathsf{succ}(\mathcal{O}), \mathsf{succ}(\mathcal{O})) \succ_{\mathsf{plus}} (\mathcal{O}, \mathsf{succ}(\mathcal{O}))$

Zeige $\forall x_1, x_2, x_3 : \mathsf{num}\ \ \mathsf{plus}(x_1, \mathsf{plus}(x_2, x_3)) \equiv \mathsf{plus}(\mathsf{plus}(x_1, x_2), x_3)$

Strukturelle Induktion, Induktionsvariable x_1

- $\forall x_2, x_3 : \mathsf{num}\ \ \mathsf{plus}(\mathcal{O}, \mathsf{plus}(x_2, x_3)) \equiv \mathsf{plus}(\mathsf{plus}(\mathcal{O}, x_2), x_3)$
- $\forall x : \mathsf{num}\ (\forall x_2, x_3 : \mathsf{num}\ \ \mathsf{plus}(\ x\ , \mathsf{plus}(x_2, x_3)) \equiv \mathsf{plus}(\mathsf{plus}(\ x\ , x_2), x_3))$

  $\rightarrow (\forall x_2, x_3 : \mathsf{num}\ \ \mathsf{plus}(\mathsf{s}(x), \mathsf{plus}(x_2, x_3)) \equiv \mathsf{plus}(\mathsf{plus}(\mathsf{s}(x), x_2), x_3))$

Induktion gemäß plus, Induktionsvariablen x_1, x_2

- $\forall y, x_3 : \mathsf{num}\ \ \mathsf{plus}(\mathcal{O}, \mathsf{plus}(y, x_3)) \equiv \mathsf{plus}(\mathsf{plus}(\mathcal{O}, y), x_3)$
- $\forall x, y : \mathsf{num}\ (\forall x_3 : \mathsf{num}\ \ \mathsf{plus}(\ x\ , \mathsf{plus}(y, x_3)) \equiv \mathsf{plus}(\mathsf{plus}(\ x\ , y), x_3))$

  $\rightarrow (\forall x_3 : \mathsf{num}\ \ \mathsf{plus}(\mathsf{s}(x), \mathsf{plus}(y, x_3)) \equiv \mathsf{plus}(\mathsf{plus}(\mathsf{s}(x), y), x_3))$