Stabilität: Relation $\succ$ über Termen heißt *stabil* gdw. für alle Terme t_1, t_2 und Substitutionen σ folgt aus $t_1 \succ t_2$, dass $\sigma(t_1) \succ \sigma(t_2)$.

Monotonie: Relation $\succ$ heißt *monoton* gdw. für alle Terme t_1, t_2, q und alle $\pi \in Occ(q)$ folgt aus $t_1 \succ t_2$, dass $q[t_1]_\pi \succ q[t_2]_\pi$.

Reduktionsrelation

Relation $\succ$ über Termen ist *Reduktionsrelation* gdw.
$\succ$ ist fundiert, stabil und monoton.

Reduktionsordnung

Relation $\succ$ über Termen ist *Reduktionsordnung* gdw.
$\succ$ ist fundiert, stabil, monoton und transitiv.

Satz 6.1.8

P terminiert gdw. es ex. Reduktionsrelation $\succ$ mit $l \succ r$ für alle $l \equiv r \in E_P$.

Einbettungsordnung: $s \succ_{emb} t$ gdw.

- $s = f(s_1, \ldots, s_n)$ und $s_i \succeq_{emb} t$ für ein $i \in \{1, \ldots, n\}$ oder
- $s = f(s_1, \ldots, s_n)$, $t = f(t_1, \ldots, t_n)$, $s_i \succ_{emb} t_i$ für ein $i \in \{1, \ldots, n\}$ und $s_j \succeq_{emb} t_j$ für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$ mit $j \neq i$.

Hierbei gilt $s \succeq_{emb} t$ gdw. $s \succ_{emb} t$ oder $s = t$.

Lemma 6.1.6
Die Einbettungsordnung $\succ_{emb}$ ist eine Reduktionsordnung.

$$\begin{array}{lcl}
\multicolumn{3}{l}{\textbf{function}\ \ \mathsf{subtract} : \mathsf{number} \times \mathsf{number} \rightarrow \mathsf{number}} \\
\mathsf{subtract}(x, \mathcal{O}) & \equiv & x \\
\mathsf{subtract}(\mathcal{O}, \mathsf{succ}(y)) & \equiv & \mathcal{O} \\
\mathsf{subtract}(\mathsf{succ}(x), \mathsf{succ}(y)) & \equiv & \mathsf{subtract}(x, y)
\end{array}$$

$$\textbf{function} \;\; \mathsf{sum} : \mathsf{number} \times \mathsf{number} \longrightarrow \mathsf{number}$$

$$\begin{aligned}
\mathsf{sum}(\mathcal{O}, y) &\equiv y \\
\mathsf{sum}(\mathsf{succ}(x), y) &\equiv \mathsf{sum}(x, \mathsf{succ}(y))
\end{aligned}$$

$$\textbf{function} \;\; \mathsf{pred} : \mathsf{number} \longrightarrow \mathsf{number}$$

$$\begin{aligned}
\mathsf{pred}(\mathcal{O}) &\equiv \mathcal{O} \\
\mathsf{pred}(\mathsf{succ}(x)) &\equiv x
\end{aligned}$$

$$\textbf{function} \;\; \mathsf{minus} : \mathsf{number} \times \mathsf{number} \longrightarrow \mathsf{number}$$

$$\begin{aligned}
\mathsf{minus}(x, \mathcal{O}) &\equiv x \\
\mathsf{minus}(x, \mathsf{succ}(y)) &\equiv \mathsf{minus}(\mathsf{pred}(x), y)
\end{aligned}$$

$$\mathbf{function}\ \ \mathsf{ge} : \mathsf{number} \times \mathsf{number} \rightarrow \mathsf{bool}$$

$$\begin{aligned}
\mathsf{ge}(x, \mathcal{O}) &\equiv \mathsf{true} \\
\mathsf{ge}(\mathcal{O}, \mathsf{succ}(y)) &\equiv \mathsf{false} \\
\mathsf{ge}(\mathsf{succ}(x), \mathsf{succ}(y)) &\equiv \mathsf{ge}(x, y)
\end{aligned}$$

$$\mathbf{function}\ \ \mathsf{if} : \mathsf{bool} \times \mathsf{number} \times \mathsf{number} \rightarrow \mathsf{number}$$

$$\begin{aligned}
\mathsf{if}(\mathsf{true}, x, y) &\equiv x \\
\mathsf{if}(\mathsf{false}, x, y) &\equiv y
\end{aligned}$$

$$\mathbf{function}\ \ \mathsf{subtract} : \mathsf{number} \times \mathsf{number} \rightarrow \mathsf{number}$$

$$\begin{aligned}
\mathsf{subtract}(x, \mathcal{O}) &\equiv x \\
\mathsf{subtract}(\mathcal{O}, \mathsf{succ}(y)) &\equiv \mathcal{O} \\
\mathsf{subtract}(\mathsf{succ}(x), \mathsf{succ}(y)) &\equiv \mathsf{subtract}(x, y)
\end{aligned}$$

$$\mathbf{function}\ \ \mathsf{quot} : \mathsf{number} \times \mathsf{number} \rightarrow \mathsf{number}$$

$$\begin{aligned}
\mathsf{quot}(x, \mathcal{O}) &\equiv \mathcal{O} \\
\mathsf{quot}(\mathcal{O}, \mathsf{succ}(y)) &\equiv \mathcal{O} \\
\mathsf{quot}(\mathsf{succ}(x), \mathsf{succ}(y)) &\equiv \mathsf{if}(\mathsf{ge}(x, y), \\
&\qquad \mathsf{succ}(\mathsf{quot}(\mathsf{subtract}(x, y), \mathsf{succ}(y))), \\
&\qquad \mathcal{O})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& \mathsf{quot}(\mathsf{succ}^9(\mathcal{O}), \mathsf{succ}^3(\mathcal{O})) \\
{\color{red}\Rightarrow_P}\ & \mathsf{if}(\ldots \mathsf{quot}(\mathsf{subtract}(\mathsf{succ}^8(\mathcal{O}), \mathsf{succ}^2(\mathcal{O})), \mathsf{succ}^3(\mathcal{O})) \ldots) \\
\Rightarrow_P^*\ & \mathsf{if}(\ldots \mathsf{quot}(\mathsf{succ}^6(\mathcal{O}), \mathsf{succ}^3(\mathcal{O})) \ldots) \\
{\color{red}\Rightarrow_P}\ & \mathsf{if}(\ldots \mathsf{quot}(\mathsf{subtract}(\mathsf{succ}^5(\mathcal{O}), \mathsf{succ}^2(\mathcal{O})), \mathsf{succ}^3(\mathcal{O})) \ldots) \\
\Rightarrow_P^*\ & \mathsf{if}(\ldots \mathsf{quot}(\mathsf{succ}^3(\mathcal{O}), \mathsf{succ}^3(\mathcal{O})) \ldots) \\
{\color{red}\Rightarrow_P}\ & \mathsf{if}(\ldots \mathsf{quot}(\mathsf{subtract}(\mathsf{succ}^2(\mathcal{O}), \mathsf{succ}^2(\mathcal{O})), \mathsf{succ}^3(\mathcal{O})) \ldots) \\
\Rightarrow_P^*\ & \mathsf{if}(\ldots \mathsf{quot}(\mathcal{O}, \mathsf{succ}^3(\mathcal{O})) \ldots) \\
\Rightarrow_P^*\ & \mathsf{succ}^3(\mathcal{O})
\end{aligned}
$$