Prof. Dr. J. Giesl
D. Dlugosz

2. Übung zu „Automatisierte Programmverifikation ", SS 03
Abgabe: Mi, 14.05.03, in der Frontalübung

Aufgabe 1 (2 Punkte)

Seien t, r, q Terme mit $\pi_1, \pi_2 \in Occ(t)$ und $\pi_1 \perp \pi_2$. Beweisen Sie unter Verwendung der strukturellen Induktion über die Struktur des Terms t die folgende Aussage:

$$(t[r]_{\pi_1})[q]_{\pi_2} = (t[q]_{\pi_2})[r]_{\pi_1}$$

Aufgabe 2 (1+1+1 Punkte)

Zeigen Sie, dass für jede Interpretation I gilt:

a) $Th(I) \neq \varnothing$,

b) für alle $\varphi \in Th(I)$ gilt: $\neg\varphi \notin Th(I)$, d.h. $Th(I)$ ist *konsistent*,

c) für alle $\varphi \in \mathcal{F}_g(\Sigma, \mathcal{V})$ gilt: $\varphi \in Th(I) \vee \neg\varphi \in Th(I)$, d.h. $Th(I)$ ist *vollständig*.

Aufgabe 3 (2 Punkte)

Beweisen Sie unter Verwendung der strukturellen Induktion das *Substitutionslemma*:

Sei $I = (\mathcal{A}, \alpha, \beta)$ eine Interpretation für eine Signatur Σ und sei $\sigma = \{x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n\}$ eine Substitution. Dann gilt:

$$I(\sigma(t)) = I[\![x_1/I(t_1), \ldots, x_n/I(t_n)]\!](t) \text{ für alle } t \in \mathcal{T}(\Sigma, \mathcal{V})$$

Aufgabe 4 (2+2 Punkte)

Sei die Signatur Σ gegeben durch $\Sigma_{\varepsilon,s} = \{\mathsf{e}\}$ und $\Sigma_{s\,s,s} = \{\mathsf{f}\}$. Ferner sei $\Phi = \{\mathsf{f}(x, \mathsf{f}(y, z)) \equiv \mathsf{f}(\mathsf{f}(x, y), z), \mathsf{f}(x, \mathsf{e}) \equiv x,\ \mathsf{f}(\mathsf{e}, x) \equiv x\}$ eine Menge von Formeln über Σ und $\mathcal{V} = \{x, y, z, \ldots\}$.

Zeigen oder widerlegen Sie:

a) $\Phi \models \mathsf{f}(x, y) \equiv \mathsf{f}(y, x)$

b) $\Phi \models \mathsf{f}(\mathsf{e}, x) \equiv \mathsf{f}(x, \mathsf{e})$