Prof. Dr. J. Giesl
M. Brockschmidt, F. Emmes, C. Fuhs, C. Otto, T. Ströder

Vorname: ______________________________

Nachname: ______________________________

Matrikelnummer: ______________________________

Studiengang (bitte ankreuzen):

○ Informatik Bachelor
○ Informatik Master (Auflage)
○ Mathematik Bachelor
○ Technik-Kommunikation M.A.
○ Informatik Lehramt
○ Informatik Promotion (Auflage)
○ Technik-Kommunikation Bachelor
○ Sonstige: ______________________

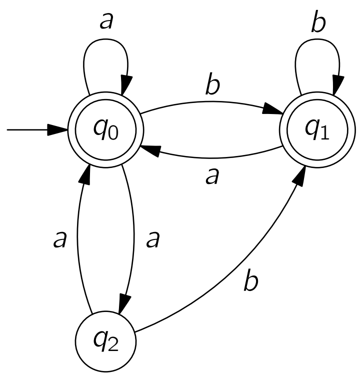
	Anzahl Punkte	**Erreichte Punkte**
Aufgabe 1	**5**	
Aufgabe 2	**5**	
Aufgabe 3	**4**	
Aufgabe 4	**4**	
Aufgabe 5	**4**	
Aufgabe 6	**8**	
Aufgabe 7	**3**	
Aufgabe 8	**4**	
Summe	**37**	

Hinweise:

- Geben Sie Ihre Antworten in lesbarer und verständlicher Form an.
- Schreiben Sie mit dokumentenechten Stiften, nicht mit roten oder grünen Stiften und nicht mit Bleistiften.
- Bitte beantworten Sie die Aufgaben auf den Aufgabenblättern (benutzen Sie auch die Rückseiten).
- **Auf alle Blätter** (inklusive zusätzliche Blätter) müssen Sie **Ihren Vornamen, Ihren Nachnamen und Ihre Matrikelnummer** schreiben.
- Was nicht bewertet werden soll, streichen Sie bitte durch.
- Werden **Täuschungsversuche** beobachtet, so wird die Klausur mit **0 Punkten** bewertet.
- Geben Sie am Ende der Übung **alle Blätter zusammen mit den Aufgabenblättern ab**.

Aufgabe 1 (Endliche Automaten): **(3 + 1 + 1 = 5 Punkte)**

Sei $\Sigma = \{a, b\}$ ein Alphabet. Betrachten Sie den folgenden NFA M.



a) Überführen Sie den NFA M in einen DFA M' mit $L(M) = L(M')$, indem Sie den Potenzautomaten zu M bilden.

b) Gilt $L(M) = \Sigma^*$? Geben Sie eine kurze Begründung für Ihre Aussage.

c) Geben Sie den minimalen DFA M_{min} mit $L(M) = L(M_{min})$ an. Sie müssen für diese Aufgabe **nicht** den Minimierungsalgorithmus aus der Vorlesung anwenden. Das Ergebnis aus Aufgabenteil b) könnte jedoch hilfreich sein.

Aufgabe 2 (Induktionsbeweis): **(5 Punkte)**

Sei Σ ein Alphabet und $\sigma : \Sigma \to \Sigma$ eine Permutation über Σ. Beispielsweise wäre für $\Sigma = \{a, b, c\}$ die Funktion σ mit $\sigma(a) = b$, $\sigma(b) = c$ und $\sigma(c) = a$ eine Permutation.
Wir erweitern σ zu einer Funktion $\overline{\sigma} : \Sigma^* \to \Sigma^*$ auf Wörtern, indem wir jedes Zeichen einzeln permutieren:

$$\overline{\sigma}(w) = \begin{cases} \overline{\sigma}(w') \cdot \sigma(a) & \text{, falls } w = w' \cdot a \text{ mit } a \in \Sigma, w' \in \Sigma^* \\ \epsilon & \text{, falls } w = \epsilon \end{cases}$$

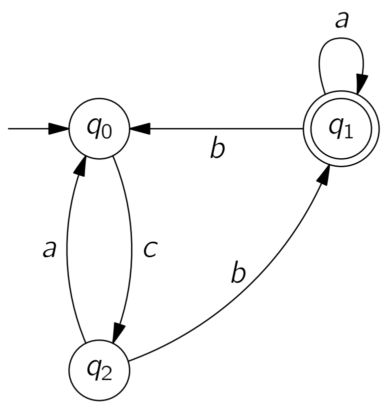
Für σ wie oben gilt also $\overline{\sigma}(abc) = bca$.
Zu jedem DFA $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ erstellen wir nun einen DFA $\overline{M} = (Q, \Sigma, \delta', q_0, F)$, der die permutierten Wörter erkennen soll. Dafür definieren wir $\delta'(q, \sigma(a)) = \delta(q, a)$.
Um nachzuweisen, dass $L(\overline{M}) = \{\overline{\sigma}(w) \mid w \in L(M)\}$ gilt, beweisen Sie die allgemeinere Aussage

$$\hat{\delta}'(q, \overline{\sigma}(w)) = \hat{\delta}(q, w)$$

für alle $q \in Q$ und verwenden Sie dabei Induktion über die Wortlänge $|w|$.

Aufgabe 3 (NFAs und reguläre Ausdrücke): (4 Punkte)

Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$ ein Alphabet. Wandeln Sie folgenden NFA über Σ in einen äquivalenten regulären Ausdruck um, indem Sie Zustände schrittweise entfernen und die betroffenen Kanten durch reguläre Ausdrücke ersetzen. Geben Sie hierzu zunächst den resultierenden Automaten nach Entfernung von q_2 an und geben Sie danach den zum Schluss abgelesenen regulären Ausdruck an.



Aufgabe 4 (Unproduktive Symbole): **(2 + 2 = 4 Punkte)**

Sei $G := (N, T, P, S)$ eine kontextfreie Grammatik mit $N := \{S, A, B, C\}, T := \{a, b, c\}$ und P wie folgt:

$$\begin{array}{rcl} S & \to & AB \mid a \\ A & \to & SA \\ B & \to & CA \mid b \\ C & \to & BB \mid c \end{array}$$

a) Ermitteln sie die Menge $\{Z \in N \mid \text{es gibt kein } w \in T^* \text{ mit } Z \Rightarrow^* w\}$ der unproduktiven Nonterminale mit Hilfe des in der Vorlesung vorgestellten Verfahrens. Geben Sie als Zwischenergebnis auch den NFA für die Sprache $pre^*_G(T^*)$ an.

b) Geben Sie eine zu G äquivalente Grammatik G' an, in der nur noch produktive, vom Startsymbol S aus erreichbare Nonterminale und Terminale existieren und aus der die unproduktiven Nonterminale entfernt wurden.

Aufgabe 5 (CYK-Algorithmus): **(4 Punkte)**

Gegeben sei die folgende Grammatik G in Chomsky-Normalform.

$$
\begin{array}{rcl}
S & \to & AC \\
A & \to & R_aB \mid R_aR_b \\
B & \to & R_bC \\
C & \to & R_bR_c \mid CR_c \mid R_cR_c \\
R_a & \to & a \\
R_b & \to & b \\
R_c & \to & c
\end{array}
$$

Testen Sie mit dem CYK-Algorithmus, ob das Wort $w = abcc$ in $L(G)$ liegt.

Aufgabe 6 (Pumping-Lemma): **(2 + 4 + 2 = 8 Punkte)**

a) In dieser Aufgabe geht es darum, zu beweisen, dass aus den Eigenschaften des regulären Pumping-Lemmas die Eigenschaften des kontextfreien Pumping-Lemmas folgen.

Sei L eine Sprache, für die folgendes gilt:

Es gibt ein $n \in \mathbb{N}_0$, so dass jedes Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$ in $z = rst$ zerlegt werden kann mit

- $|rs| \leq n$
- $|s| > 0$
- $rs^it \in L$ für alle $i \geq 0$

Zeigen Sie, dass L dann folgende Eigenschaften erfüllt.

Es gibt ein $n \in \mathbb{N}_0$, so dass jedes Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$ in $z = uvwxy$ zerlegt werden kann mit

- $|vwx| \leq n$
- $|vx| > 0$
- $uv^iwx^iy \in L$ für alle $i \geq 0$

b) Betrachten Sie folgende Sprache $L_1 = \{a^kba^kba^k \mid k \geq 0\}$.

Beweisen Sie mithilfe des Pumping-Lemmas für kontextfreie Sprachen, dass L_1 nicht kontextfrei ist.

c) Sei L eine Sprache, die folgende Eigenschaften **nicht** erfüllt:

Es gibt ein $n \in \mathbb{N}_0$, so dass jedes Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$ in $z = uvwxy$ zerlegt werden kann mit

- $|vwx| \leq n$
- $|vx| > 0$
- $uv^iwx^iy \in L$ für alle $i \geq 0$

Zeigen Sie, dass L dann unendlich viele Äquivalenzklassen bzgl. der Myhill-Nerode-Relation $\equiv_L$ hat.

Sie dürfen selbstverständlich Sätze aus der Vorlesung in ihrem Beweis verwenden.

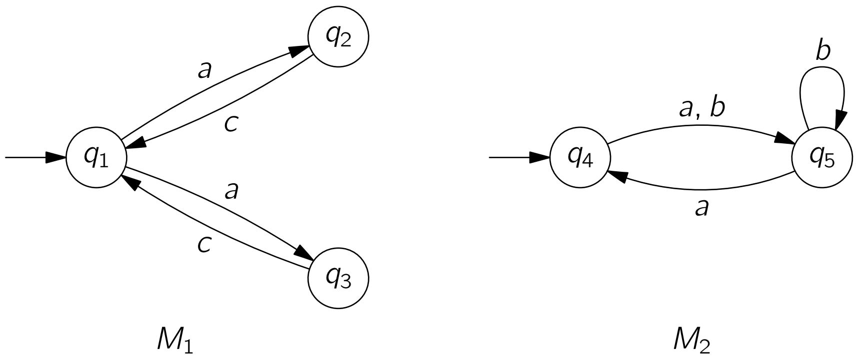
Aufgabe 7 (Kellerautomaten): **(3 Punkte)**

Gegeben sei die folgende Grammatik G:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow BC \\ A &\rightarrow aBB \mid b \\ B &\rightarrow bSA \mid a \\ C &\rightarrow cS \end{aligned}$$

Geben Sie einen Kellerautomaten M an, so dass $N(M) = L(G)$ gilt. Ihr Automat sollte dabei nicht mehr als 6 Transitionen enthalten.

Aufgabe 8 (Synchronisiertes Produkt): **(4 Punkte)**



Gegeben seien die NFAs M_1 über dem Alphabet $\{a, c\}$ und M_2 über dem Alphabet $\{a, b\}$. Berechnen Sie das synchronisierte Produkt $M_1 \circ M_2$.