Prof. Dr. J. Giesl

M. Brockschmidt, F. Emmes, C. Fuhs, C. Otto, T. Ströder

Vorname: ______________________________

Nachname: ______________________________

Matrikelnummer: ______________________________

Studiengang (bitte ankreuzen):

- ○ Informatik Bachelor
- ○ Informatik Master (Auflage)
- ○ Mathematik Bachelor
- ○ Technik-Kommunikation M.A.
- ○ Informatik Lehramt
- ○ Informatik Promotion (Auflage)
- ○ Technik-Kommunikation Bachelor
- ○ Sonstige: ______________________________

	Anzahl Punkte	**Erreichte Punkte**
Aufgabe 1	**6**	
Aufgabe 2	**3**	
Aufgabe 3	**8**	
Aufgabe 4	**4**	
Aufgabe 5	**4**	
Aufgabe 6	**6**	
Aufgabe 7	**2**	
Aufgabe 8	**2**	
Summe	**35**	

Hinweise:

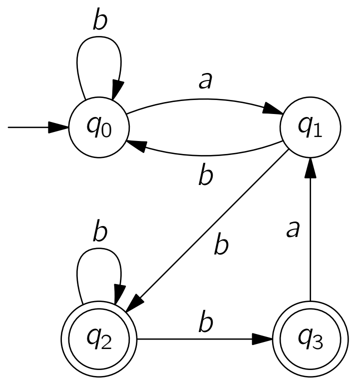
- Geben Sie Ihre Antworten in lesbarer und verständlicher Form an.
- Schreiben Sie mit dokumentenechten Stiften, nicht mit roten oder grünen Stiften und nicht mit Bleistiften.
- Bitte beantworten Sie die Aufgaben auf den Aufgabenblättern (benutzen Sie auch die Rückseiten).
- **Auf alle Blätter** (inklusive zusätzliche Blätter) müssen Sie **Ihren Vornamen, Ihren Nachnamen und Ihre Matrikelnummer** schreiben.
- Was nicht bewertet werden soll, streichen Sie bitte durch.
- Werden **Täuschungsversuche** beobachtet, so wird die Klausur mit **0 Punkten** bewertet.
- Geben Sie am Ende der Klausur **alle Blätter zusammen mit den Aufgabenblättern ab**.

Name: **Matrikelnummer:**

Aufgabe 1 (Endliche Automaten): **(3 + 3 = 6 Punkte)**

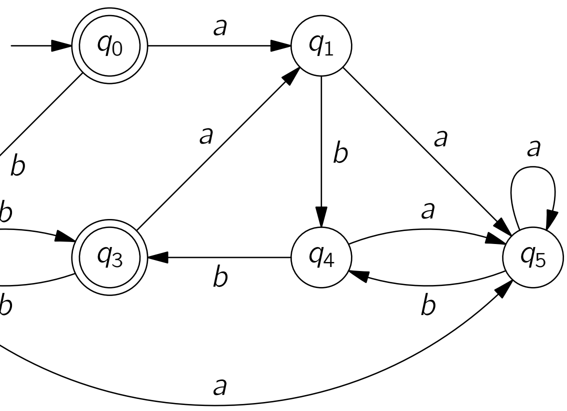
Sei $\Sigma = \{a, b\}$ ein Alphabet.

a) Betrachten Sie den folgenden NFA M_1.



Überführen Sie den NFA M_1 in einen DFA M_1' mit $L(M_1) = L(M_1')$, indem Sie den Potenzautomaten zu M_1 bilden.

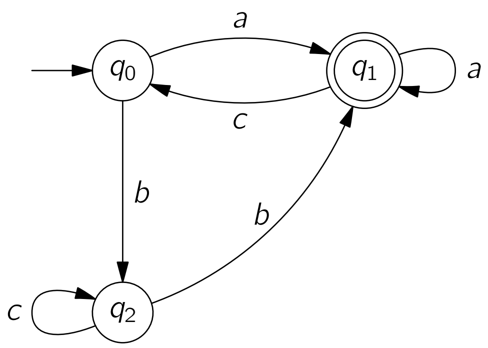
b) Betrachten Sie den folgenden DFA M_2.



Bestimmen Sie unter Verwendung eines der beiden Minimierungsverfahren aus der Vorlesung den minimalen DFA M_2' mit $L(M_2) = L(M_2')$. Geben Sie dabei sowohl die bei der Ausführung des Algorithmus entstehende Tabelle als auch eine graphische Darstellung des minimalen DFA M_2' an.

Aufgabe 2 (NFAs und reguläre Ausdrücke): **(3 Punkte)**

Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$ ein Alphabet. Wandeln Sie folgenden NFA über Σ in einen äquivalenten regulären Ausdruck um, indem Sie Zustände schrittweise entfernen und die betroffenen Kanten durch reguläre Ausdrücke ersetzen. Geben Sie hierzu zunächst den resultierenden Automaten nach Entfernung von q_2 an und geben Sie danach den zum Schluss abgelesenen regulären Ausdruck an.



Aufgabe 3 (Induktionsbeweis): **(3 + 5 = 8 Punkte)**

Sei T ein Alphabet von Terminalsymbolen, N eine Menge von Nonterminalsymbolen und $\sigma : T \to T$ eine Permutation über T. Beispielsweise wäre für $T_0 = \{a, b, c\}$ die Funktion σ_0 mit $\sigma_0(a) = b$, $\sigma_0(b) = c$ und $\sigma_0(c) = a$ eine Permutation.
Wir erweitern σ zu einer Funktion $\overline{\sigma} : (T \cup N)^* \to (T \cup N)^*$ auf Wörtern von Terminal- und Nonterminalsymbolen, indem wir Symbole aus T einzeln permutieren und Symbole aus N unverändert lassen:

$$\overline{\sigma}(w) = \begin{cases} \overline{\sigma}(w') \cdot \sigma(a) & \text{, falls } w = w' \cdot a \text{ mit } a \in T, w' \in (T \cup N)^* \\ \overline{\sigma}(w') \cdot A & \text{, falls } w = w' \cdot A \text{ mit } A \in N, w' \in (T \cup N)^* \\ \epsilon & \text{, falls } w = \epsilon \end{cases}$$

Für σ_0 wie oben und Nonterminale A, B, C gilt also $\overline{\sigma_0}(aAbBcC) = bAcBaC$.
Zu jeder kontextfreien Grammatik $G = (N, T, P, S)$ in **Chomsky-Normalform** erstellen wir nun eine kontextfreie Grammatik $\overline{G} = (N, T, \overline{P}, S)$, die die permutierten Wörter erkennen soll. Dafür definieren wir $\overline{P}$ wie folgt: Es gilt $A \to w \in P$ genau dann, wenn $A \to \overline{\sigma}(w) \in \overline{P}$ gilt.

a) Beweisen Sie zunächst, dass $\overline{\sigma}(w) = w$ für alle $w \in N^*$ gilt und verwenden Sie dabei Induktion über die Wortlänge $|w|$.

b) Beweisen Sie nun, dass $L(\overline{G}) \subseteq \{\overline{\sigma}(w) \mid w \in L(G)\}$ gilt, indem Sie zeigen, dass für alle $A \in N$, $w \in (T \cup N)^*$ aus $A \Rightarrow^n_G w$ auch $A \Rightarrow^n_{\overline{G}} \overline{\sigma}(w)$ folgt. [1] Verwenden Sie dazu Induktion über die Ableitungslänge n.

Sie dürfen dazu verwenden, dass $\overline{\sigma}(w) \cdot \overline{\sigma}(w') = \overline{\sigma}(w \cdot w')$ für alle $w, w' \in (T \cup N)^*$ gilt.

Hinweise:

- Im Induktionsschluss betrachtet man den Fall $n \geq 1$. Hier soll man als **Induktionshypothese** voraussetzen, dass die zu beweisende Aussage **für alle** n' mit $0 \leq n' < n$ gilt.
- Trennen Sie im Induktionsschritt die Ableitung $A \Rightarrow^n_G w$ in $A \Rightarrow^1_G w' \Rightarrow^{n-1}_G w$ auf und nutzen Sie aus, dass G in CNF ist.

[1] Hierbei bedeutet $A \Rightarrow^n_G w$, dass man das Wort w in n Ableitungsschritten mit der Grammatik G aus dem Nonterminalsymbol A erreichen kann.

Aufgabe 4 (Unproduktive Symbole): **(2 + 2 = 4 Punkte)**

Sei $G := (N, T, P, S)$ eine kontextfreie Grammatik mit $N := \{S, A, B, C\}, T := \{a, b, c\}$ und P wie folgt:

$$\begin{array}{rcl} S & \rightarrow & aS \mid bAB \mid b \\ A & \rightarrow & aA \mid aC \\ B & \rightarrow & bSB \mid b \\ C & \rightarrow & cA \\ D & \rightarrow & cSB \end{array}$$

a) Ermitteln sie die Menge $\{Z \in N \mid \text{es gibt kein } w \in T^* \text{ mit } Z \Rightarrow^* w\}$ der unproduktiven Nonterminale mit Hilfe des in der Vorlesung vorgestellten Verfahrens. Geben Sie als Zwischenergebnis auch den NFA für die Sprache $pre^*(T^*)$ an.

b) Geben Sie die Produktionen einer zu G äquivalente Grammatik G' an, in denen nur noch produktive, vom Startsymbol S aus erreichbare Nonterminale und Terminale verwendet werden und aus denen unproduktive Nonterminale entfernt wurden.

Aufgabe 5 (CYK-Algorithmus): **(4 Punkte)**

Gegeben sei die folgende Grammatik G in Chomsky-Normalform.

$$\begin{array}{lcl} S & \rightarrow & b \mid BC \\ A & \rightarrow & a \mid SC \\ B & \rightarrow & c \mid SC \mid AS \\ C & \rightarrow & c \mid CA \mid AB \end{array}$$

Testen Sie mit dem CYK-Algorithmus, ob das Wort $w = abcc$ in $L(G)$ liegt.

Aufgabe 6 (Pumping-Lemma): **(3 + 3 = 6 Punkte)**

Wir erinnern an das reguläre Pumping-Lemma:
Sei L eine reguläre Sprache. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}_0$, so dass jedes Wort $w \in L$ mit $|w| \geq n$ in $w = xyz$ zerlegt werden kann mit

- $|xy| \leq n$
- $|y| > 0$
- $xy^iz \in L$ für alle $i \geq 0$

a) Betrachten Sie die Sprache $L_1 = \{a^k b^\ell c^\ell \mid k, \ell \geq 0\}$.

Beweisen Sie mithilfe des Pumping-Lemmas für reguläre Sprachen, dass L_1 nicht regulär ist.

b) Die Sprache $L_2 = \{a^i b^j c^k \mid i, j, k \geq 0 \text{ und } (i = 0 \text{ oder } j = k)\}$ ist nicht regulär. Beweisen Sie, dass L_2 trotzdem die Eigenschaften des regulären Pumping-Lemmas erfüllt.

Hinweis: Um dies nachzuweisen, muss man eine Grenze n wählen und eine Zerlegung für jedes Wort $w \in L_2$ mit $|w| \geq n$ angeben, für die dann nachzuweisen ist, dass die Eigenschaften des Pumping-Lemmas erfüllt sind. Hierbei ist bereits $n = 1$ eine geeignete Wahl.

Aufgabe 7 (Kellerautomaten): **(2 Punkte)**

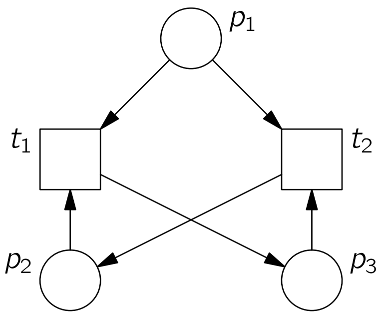
Gegeben sei die folgende Grammatik G:

$$\begin{aligned} S &\to aCB \mid bDA \\ A &\to a \\ B &\to b \\ C &\to aCB \mid aB \\ D &\to bDA \mid bA \end{aligned}$$

Geben Sie einen Kellerautomaten M mit höchstens 8 Transitionen an, so dass $N(M) = L(G)$ gilt.

Aufgabe 8 (Petrinetze): **(2 Punkte)**

Betrachten Sie folgendes Petrinetz N.



Weiterhin sei die Markierung $m = (2, 1, 0)$ für die Stellen p_1, p_2, p_3 gegeben. Untersuchen Sie nun, ob die Markierung $m' = (0, 1, 1)$ von m aus erreichbar ist und geben Sie Ihren Lösungsweg an. Graphisch lassen sich die beiden Markierungen wie folgt illustrieren: